



Universitat
de les Illes Balears

TREBALL DE FI DE GRAU

Comparació entre mètodes numèrics de diagnòstic i pronòstic de la velocitat vertical atmosfèrica: Aplicació a episodis ciclònics mediterranis

David Ramonell Pujol

Grau de Física

Facultat de Ciències

Any acadèmic 2022-23

Comparació entre mètodes numèrics de diagnòstic i pronòstic de la velocitat vertical atmosfèrica: Aplicació a episodis mediterranis

David Ramonell Pujol

Treball de Fi de Grau

Facultat de: Ciències

Universitat de les Illes Balears

Any acadèmic 2022-23

Paraules clau del treball:

Meteorologia dinàmica, Teoria quasigeostròfica, Diagnòstic de velocitats verticals atmosfèriques, Pronòstic de velocitats verticals amb el model TRAM-UIB.

Nom del tutor / la tutora del treball: Romualdo Romero March

Autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el repositori institucional per consultar-lo en accés obert i difondre'l en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació

Autor/a		Tutor/a	
Sí	No	Sí	No
☒	☐	☒	☐

Resum

La velocitat vertical atmosfèrica és una variable molt important, amb un paper directe en la situació meteorològica donat que subsidències de l'aire impliquen bon temps, mentre que per ascendències ocorre el contrari, podent aparèixer condensació, pluja i fins i tot tempestats sota les condicions adequades. Per sistemes de grans escales espacials, les magnituds d'aquestes velocitats són de l'ordre de cm/s, el que complica la seva mesura eficaç i precisa. Aquesta dificultat comporta que sigui més típic estimar el seu valor mitjançant equacions de diagnòstic desenvolupades per marcs teòrics simplificats sobre dinàmica atmosfèrica. Alternativament, també es poden pronosticar aplicant models numèrics amb equacions mesoescalars junt tots els processos dinàmics i físics representats a les seves equacions.

En aquest treball seran usats cinc mètodes de diagnòstic, dos d'aquests sent unes expressions integrals més primitives conegudes com el mètode cinemàtic i de la vorticitat, corresponent la resta a les equacions Omega clàssica, de Trenberth i del vector $\vec{Q}$ pròpies de la teoria quasigeostròfica de l'atmosfera. Primerament, aquest treball consistirà en la seva implementació sobre un domini sinòptic i resolució numèrica fent ús de dades meteorològiques corresponents a gener de 2020, on la borrasca Glòria va afectar la península Ibèrica i les Illes Balears. Aquests càlculs es realitzaran amb la finalitat de comparar els diferents mètodes diagnòstics en termes dels seus resultats, aplicabilitat pràctica i avantatges, esclarint per què les equacions Omega suposen una millora respecte a aquells mètodes més primitius.

Després d'una comparació dels resultats proporcionats per cada equació Omega i l'elecció d'una com la que millors qualitats posseeix per diagnosticar la situació dinàmica, en la part final del treball seran exposades les velocitats verticals de pronòstic calculades pel model mesoescalar TRAM-UIB, partint des de la primera data i hora de les dades disponibles sobre l'episodi ciclònic. Els resultats de pronòstic seran comparats respecte a aquells del diagnòstic instantani de l'equació Omega elegida, analitzant així la capacitat predictiva de les velocitats verticals per part del nou model de la UIB.

Resumen

La velocidad vertical atmosférica es una variable muy importante, teniendo un papel directo en la situación meteorológica dado que subsidencias de aire implican buen tiempo, mientras que en ascendencias sucede lo contrario, pudiendo aparecer condensación, lluvia y hasta tempestades bajo condiciones adecuadas. Para sistemas de grandes escalas espaciales, las magnitudes de estas velocidades son del orden de cm/s, lo que complica su medida eficaz y precisa. Esta dificultad conlleva que sea más típico estimar su valor mediante ecuaciones de diagnóstico desarrolladas por marcos teóricos simplificados sobre dinámica atmosférica. Alternativamente, también se pueden pronosticar usando modelos numéricos con ecuaciones mesoescalares junto a todos los procesos dinámicos y físicos representados en sus ecuaciones.

En este trabajo serán usados cinco métodos de diagnóstico, dos de estos siendo unas expresiones integrales más primitivas acuñadas como el método cinemático y de la vorticidad, correspondiendo el resto a las ecuaciones Omega clásica, de Trenberth i del vector $\vec{Q}$ propias de la teoría

cuasigeostrófica de la atmósfera. Primeramente, este trabajo consistirá en su implementación sobre un dominio sinóptico y resolución numérica haciendo uso de datos meteorológicos correspondientes a enero de 2020, donde la borrasca Gloria afectó la península Ibérica y las Islas Baleares. Estos cálculos se realizarán con la finalidad de comparar los diferentes métodos diagnósticos en términos de sus resultados, aplicabilidad práctica y ventajas, esclareciendo por qué las ecuaciones Omega suponen una mejora respecto aquellos métodos más primitivos.

Tras una comparación de los resultados proporcionados por cada ecuación Omega y la elección de una como la que mejores cualidades posee al diagnosticar la situación dinámica, en la parte final del trabajo serán expuestas las velocidades verticales de pronóstico calculadas por el modelo mesoescalar TRAM-UIB, partiendo desde la primera fecha y hora de los datos disponibles sobre el episodio ciclónico. Los resultados de pronóstico serán comparados respecto aquellos del diagnóstico instantáneo de la ecuación Omega elegida, analizando así la capacidad predictiva de las velocidades verticales por parte del nuevo modelo de la UIB.

Abstract

The atmospheric vertical velocity is a very important variable, playing a crucial role in the weather situation, as subsiding air implies fair weather, while ascending air is the opposite, leading to condensation, rain and even storms under appropriate conditions. For large-scale systems, the magnitudes of these velocities are on the order of cm/s, which hinders their effective and precise measurement. Due to this difficulty, it is easier to estimate their value using diagnostic equations developed by simplified theoretical frameworks on atmospheric dynamics. Alternatively, they can also be forecasted by making use of numerical models with mesoscale equations, incorporating all the dynamic and physical processes represented in their equations.

In this work, five diagnostic methods will be used, two of which are integral expressions known as the kinematic and vorticity methods, while the remaining methods correspond to the classical, Trenberth's and $\vec{Q}$ -vector Omega equation from the quasigeostrophic theory of the atmosphere. Initially, this work will consist of their implementation on a synoptic domain and numerical resolution using meteorological data corresponding to January 2020, when the storm Gloria affected the Iberian Peninsula and the Balearic Islands. These calculations will be used to compare the different diagnostic methods in terms of their results, practical applicability and advantages, clarifying the reasons of why the Omega equations are an improvement over those more primitive methods.

After comparing the results provided by each Omega equation and selecting the one with the best qualities for diagnosing the dynamic situation, the final part of the work will expose the forecasted vertical velocities calculated by the mesoscale model TRAM-UIB, starting from the first date and hour of available data on the cyclonic episode. The forecasted results will then be compared to those from the instantaneous diagnosis of the chosen Omega equation, thus analyzing the predictive capability of the vertical velocities by the new UIB model.

Índex

1	Motivació i objectius	6
2	Introducció teòrica	7
2.1	Dinàmica atmosfèrica. Sistemes sinòptics de latitud mitges.	7
2.2	Teoria quasigeostròfica. Equacions Omega.	11
2.3	Episodi ciclònic mediterrani: La borrasca Glòria.	14
3	Metodologia	16
3.1	Anàlisi de les dades ERA5 i del pronòstic TRAM-UIB.	16
3.2	Manipulació de les dades. Disposició i filtratge.	17
3.3	Mètodes de diferències finites sobre malles rectangulars.	18
4	Presentació i anàlisi de resultats	20
4.1	Comparació entre mètodes de diagnòstic primitius i quasigeostròfics	21
4.2	Comparació entre les equacions Omega quasigeostròfiques	26
4.3	Comparació entre resultats de diagnòstic i de pronòstic del TRAM-UIB	30
5	Conclusions	34
6	Bibliografia	35
7	Apèndix	36
7.1	Funcions analítiques i valors típics a sistemes sinòptics extratropicals	36
7.2	Desenvolupaments addicionals. Variables i funcions en diferències finites	36

1 Motivació i objectius

Els fenòmens climàtics i meteorològics, són les principals manifestacions experimentades a la superfície dels processos dinàmics i termodinàmics que ocorren a l'atmosfera. Aquests esdeveniments naturals es produeixen a la *troposfera*, la capa més baixa de l'atmosfera amb un gruix mitjà d'uns 13 km, abastant un rang de pressions de 1000 hPa fins als 200 hPa [3].

La troposfera conté el 75-80% de la massa de gasos de l'atmosfera i reté gairebé la totalitat de l'aigua present en aquesta tant en forma de vapor com líquid o gel [4]. Addicionalment, es tracta d'una capa en continu moviment, on per grans escales espacials presenta ràpides velocitats horitzontals ($\sim$ m/s) així com lentes velocitats verticals ($\sim$ cm/s). Aquests moviments verticals més lents, són producte del comportament generalment inestable de la capa causat per la transferència de calor amb la superfície, creant un perfil de temperatures decreixent amb l'altura que indueix l'aparició de processos de mescla vertical.

La gran presència d'aigua a la troposfera exerceix un paper vital en la conducció dels processos termodinàmics gràcies a la seva capacitat de transport d'energia; simultàniament, la dinàmica pròpia de la troposfera estimula l'aparició de fenòmens de saturació de l'aire humit present, generant així en conjunt diverses situacions meteorològiques. Dintre d'aquests fenòmens destaca el procés de saturació per ascens adiabàtic, on les velocitats verticals juguen un paper fonamental en la seva aparició i intensificació. En aquest procés, la partícula en ascensió experimenta un refredament molt més ràpid que el patit per la temperatura del punt de rosada T_d (temperatura on una massa d'aire humit per refredament isobàric arriba al 100% d'humitat relativa), i per tant qualsevol partícula humida satura amb suficient ascens, conduint a la generació de níguls i precipitacions.

Si bé generalment la situació meteorològica no afecta a l'estat de les infraestructures o la població, en certes condicions aquests fenòmens poden escalar, generant esdeveniments extrems com onades de fred i calor, fortes precipitacions i fins i tot tempestes i tornados, situacions que poden suposar un risc real. Les velocitats verticals són determinants en la formació de certs fenòmens extrems, com poden ser les tempestes elèctriques o les borrasques si es dona la presència d'aire molt humit a zones de baixes pressions. Per consegüent, és molt important entendre la dinàmica darrera d'aquestes velocitats a l'atmosfera, per així tenir la capacitat de determinar-la amb tècniques de diagnòstic, o amb pronòstics d'altra precisió que permetin l'emissió d'avisos i alertes si és de menester.

Els objectius perseguits per aquest treball són la implementació, resolució numèrica i comparació de diversos mètodes de diagnòstic de la velocitat vertical a sistemes sinòptics (sistemes de grans escales horitzontals) de latituds mitjanes, basats en equacions dinàmiques primitives i les pròpies de la *teoria quasigeostròfica*, a més d'analitzar la capacitat predictiva que es posseeix sobre aquestes velocitats, comparant els resultats previs més complets i precisos de diagnòstic, amb els de pronòstic obtinguts fent ús del model mesoescalar TRAM-UIB. Totes aquestes resolucions, comparacions i anàlisis, seran fets sobre dades meteorològiques corresponents a gener 2020, on la *borrasca Glòria* va afectar la península Ibèrica i les Illes Balears, visualitzant així la importància i el paper les velocitats verticals als d'episodis ciclònics.

2 Introducció teòrica

L'atmosfera és un dels grans sistemes que formen els fluids geofísics, és a dir, fluids naturals de dimensions planetàries. En aquest, la velocitat vertical és una variable de gran importància, essent que el seu signe i magnitud revela informació sobre l'estabilitat de l'aire, formació de condensació, pluges i la possible creació d'esdeveniments extrems. No obstant, la seva mesura és una tasca complicada i imprecisa, essent més pràctic la seva determinació mitjançant equacions de diagnòstic o pronòstic sobre dades meteorològiques més fàcils de mesurar.

El desenvolupament d'expressions de diagnòstic aptes per descriure les velocitats verticals, requereix primer un enteniment de les nocions bàsiques de la dinàmica atmosfèrica en termes de les variables i equacions que la componen. Una vegada introduïdes i analitzats els mètodes primatius de diagnòstic resultants, serà possible avançar a marcs teòrics més complets de la dinàmica vertical, com l'oferit per la teoria quasigeostròfica amb les *equacions Omega*.

2.1 Dinàmica atmosfèrica. Sistemes sinòptics de latitud mitges.

La dinàmica atmosfèrica a les formulacions més bàsiques, fa ús de les coordenades cartesianes projectades sobre la superfície terrestre per definir la posició espaciotemporal de les partícules, tenint així com variables independents (x, y, z, t) , on l'eix z és perpendicular a la superfície, mentre que l'eix x i y per conveni apunten en direcció est i nord respectivament (Figura 1).

L'atmosfera té una dinàmica descrita mitjançant la segona llei de Newton per una partícula d'aire de massa unitària sobre l'esfera terrestre en rotació (amb velocitat angular $\vec{\Omega}_t$). En aquest sistema, la partícula de fluid experimenta una acceleració inercial forçada per l'efecte Coriolis, gradients de pressió, la gravetat, l'acceleració centrífuga i termes de fricció:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -2\vec{\Omega}_t \times \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \vec{F}_{centrif} + \vec{F}_{fric} \quad (2.1)$$

Aquesta descripció proporciona un sistema d'equacions diferencials molt complet, però impossible de resoldre analíticament o amb molta càrrega computacional per resolucions numèriques. No obstant, les equacions de moviment (2.1) admeten simplificacions si s'estudia un sistema sinòptic no proper a la superfície, podent així menysprear termes relacionats amb la curvatura terrestre, l'acceleració centrífuga i la fricció. A més, en aquests sistemes les velocitats verticals són petites respecte a la resta de termes, permetent treure-les de les equacions i a certs components de l'acceleració Coriolis, quedant les equacions de la forma:

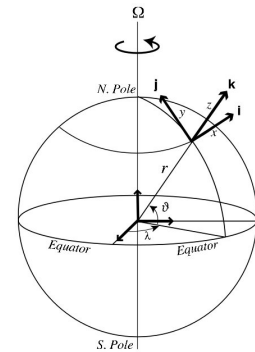


Figura 1: Representació de la base cartesiana unitària sobre la superfície terrestre. Adaptat de Adrien Lefauve (2014) *A global map of tidal dissipation over abyssal hills*.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = -f(\hat{k} \times \vec{V}) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_z p \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (2.2)$$

Essent $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$ el camp de vents horitzontal i $\vec{\nabla}_z = \partial_x\hat{i} + \partial_y\hat{j}$ el gradient horitzontal. A les equacions “ f ” correspon al *paràmetre Coriolis*, una variable definida com el doble de la projecció sobre l’eix vertical $\hat{k}$ del vector rotació de la Terra $\vec{\Omega}_t$, el qual quantifica l’efecte de l’acceleració Coriolis sobre les partícules a una latitud ϑ , assumint que el bocí espacial d’estudi es pot considerar com un pla (f_0 , aproximació del “*pla-f*”).

$$f_0 = 2\hat{k} \cdot \vec{\Omega}_t = 2\hat{k} \cdot (\Omega_t \cos \vartheta \hat{j} + \Omega_t \sin \vartheta \hat{k}) = 2\Omega_t \sin \vartheta \quad (2.3)$$

Situacions on un valor constant f_0 no sigui suficient, al paràmetre se li afegeix una dependència lineal de forma $f(y) = f_0 + \beta y$ (aproximació *pla- β*), on β és el gradient meridional del paràmetre Coriolis a una latitud fixa de forma $\beta = 2\Omega_t \cos \vartheta_0 / R_t$, essent R_t el radi de la Terra.

Altres variables i equacions importants per descriure l’atmosfera, són aqueixes relacionades amb les seves propietats termodinàmiques. A grans trets, l’aire de l’atmosfera s’estudia com un fluid que segueix l’equació del gas ideal, on per una situació d’aire completament sec:

$$p = \rho RT \quad \text{o també} \quad p\alpha = RT \quad (2.4)$$

Essent ρ la densitat de l’aire, α el volum específic ($\alpha = 1/\rho$), R la constant de gas ideal (≈ 287.04 J/kg·K) i T la temperatura. Altres variables importants a destacar serien la calor específica seca isobàrica C_p (1004.5 J/kg·K) i la temperatura potencial θ , que representa la temperatura assolida per una partícula en descens adiabàtic fins als 1000 hPa. Aquests paràmetres són típics al desenvolupament i formulació d’equacions, coeficients i paràmetres d’estabilitat, donant en conjunt una descripció termodinàmica de l’aire atmosfèric en termes de la primera llei:

$$dQ = C_p dT - \alpha dP \quad (2.5)$$

La projecció cartesiana no és l’única possible, existint altres que canvien la variable de la coordenada vertical per altra més adient a la situació d’estudi. A les *coordenades isobàriques* s’utilitza la mateixa base unitària, però la pressió com coordenada vertical (x, y, p, t), essent útil atès que sol simplificar el desenvolupament i formulació de les equacions, per exemple eliminant la força bàrica. L’ús d’aquestes implica introduir el “*geopotencial*” Φ : una variable amb superfícies de valor constant paral·lels a la superfície terrestre i de valor nul al nivell del mar; on per una acceleració gravitatòria constant i sigui Z “*l’alçada geopotencial*”, Φ es calcula com:

$$\Phi(Z) = \int_{\Phi(Z=0)}^{\Phi(Z)} d\Phi = \int_0^Z g dZ = gZ \quad (2.6)$$

Baix coordenades isobàriques, la velocitat vertical “ ω ” correspon a la variació instantània de la pressió amb el temps (Pa/s), on com la pressió és una variable que decreix amb l’altura, si $\omega > 0$ es tindran descensos, mentre que per $\omega < 0$ seran ascensos. Aquesta velocitat poc intuïtiva en magnitud, es pot relacionar amb la velocitat vertical w d’altura fent un desenvolupament en cadena i usant l’equació hidroestàtica a (2.2) verificada als sistemes sinòptics:

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt} \approx -\rho g w = -\frac{pg}{RT} w \quad (2.7)$$

Llavors, realitzant la transformació a coordenada vertical de pressió sobre les equacions de moviment (2.2), són obtingudes les equacions sinòptiques de moviment en coordenada isobàrica:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + \omega\frac{\partial\vec{V}}{\partial p} \\ \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_z p = \vec{\nabla}_p \Phi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = -f(\hat{k} \times \vec{V}) - \vec{\nabla}_p \Phi \\ \frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \end{cases} \quad (2.8)$$

Havent introduït el concepte de les coordenades isobàriques i la velocitat vertical ω , és possible desenvolupar l'expressió de la primera llei (2.5) per obtenir una de les equacions més importants de la descripció termodinàmica de l'atmosfera. Agafant així l'expressió diferencial de la primera llei i derivant respecte el temps, expandint la derivada total i introduint la definició de temperatura potencial, s'arriba a la coneguda com a *equació termodinàmica*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p T + \frac{\omega\sigma p}{R} + \frac{1}{C_p} \frac{dQ}{dt} \quad \text{per} \quad \sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial p} = \frac{R^2 T}{p^2 g} (\gamma - \delta) \quad (2.9)$$

On σ correspon al paràmetre d'estabilitat, que representa una atmosfera estàticament estable per valors positius i inestable (molt improbable) per negatius, essent γ el coeficient de refredament adiabàtic 9.8 K/km i δ el gradient vertical de temperatura estàndard 6.5 K/km. L'equació termodinàmica serà usada més endavant per desenvolupar equacions de diagnòstic de la velocitat vertical al marc teòric més complet i complex de la teoria quasigeostròfica.

La consideració d'un sistema sinòptic no és l'única reducció possible sobre les equacions de moviment. Les zones del planeta amb latituds mitjanes presenten un quocient entre acceleració inercial i Coriolis proper a zero, permetent menysprear la primera a les equacions de moviment, introduint així el concepte de *geostrofia*: la dinàmica atmosfèrica a sistemes sinòptics de latituds mitjanes ve donat per un balanç aproximat entre el gradient de pressió o geopotencial i l'acceleració Coriolis. L'aplicació de la geostrofia permet aïllar el camp de vents sorgit de l'equilibri aproximat, essent aquest el *vent geostròfic*, un camp de velocitats que per coordenades isobàriques, és paral·lel a les isohipses (línies d'alçada geopotencial Z constant):

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \vec{\nabla}_p \Phi = (u_g, v_g) = \frac{1}{f} \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

Addicionalment, el camp de velocitats geostròfiques es pot relacionar amb el camp de temperatures mitjançant les *relacions del vent tèrmic*: dues expressions sorgides de la derivació respecte a la pressió de les velocitats geostròfiques (2.10), i l'ús de la relació vertical del geopotencial amb la temperatura present a les equacions de moviment en coordenada isobàrica (2.8). Les relacions diferencials resultants mostren que la cisalla del camp de velocitats geostròfiques és un vector paral·lel a les isotermes, que deixa els aires més càlids a la seva dreta.

$$\begin{cases} -\frac{\partial\vec{V}_g}{\partial p} = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \end{cases} \longrightarrow -\frac{\partial\vec{V}_g}{\partial p} = \frac{R}{fp} \hat{k} \times \vec{\nabla}_p T = \frac{R}{fp} \left(-\frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \quad (2.11)$$

Establertes les bases de la dinàmica atmosfèrica, es poden introduir alguns mètodes primitius de càlcul de velocitats verticals: el *mètode cinemàtic* i el *mètode de la vorticitat*. Aquests dos

procediments de diagnòstic són protagonitzats per la *divergència horitzontal* δ i la *vorticitat vertical relativa* ζ , dues expressions diferencials molt útils i típiques per descriure el moviment atmosfèric, i que representen respectivament el ritme temporal de canvi relatiu d'àrea i el doble de la velocitat angular per la rotació d'un sòlid rígid, venint matemàticament donats com:

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V} \quad (2.12)$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (2.13)$$

El mètode cinemàtic és el més senzill en termes teòrics, sorgint d'expressar en coordenades isobàriques, l'equació de continuïtat provinent del principi físic de conservació de la massa:

$$\frac{d}{dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = 0 \xrightarrow{\text{Eq. hidrostàtica}} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\Delta x \Delta y \Delta p}{g} \right) = 0 \longrightarrow \delta + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.14)$$

On aïllant la derivada vertical, és possible trobar una expressió analítica per la velocitat vertical integrant des del cim de l'atmosfera on la pressió és nul·la i es té la condició de contorn $\omega(p=0) = 0$, fins a un nivell isobàric p , obtenint així l'equació que caracteritza el mètode cinemàtic:

$$\int_{\omega(p'=0)}^{\omega(p'=p)} \frac{\partial \omega}{\partial p'} dp' = - \int_0^p \delta dp' \longrightarrow \boxed{\omega(p) = \int_p^0 \delta dp'} \quad (2.15)$$

Aquest mètode de diagnòstic té l'avantatge de només necessitar la divergència del camp de vent horitzontal per trobar el moviment vertical. Malgrat això, és de difícil aplicació pràctica, atès que no verifica la condició de contorn $\omega = 0$ a la superfície i que errors en la mesura del camp de velocitats es propaguen als resultats verticals. Per pal·liar aquests inconvenients, el mètode cinemàtic s'utilitza junt *l'ajust de O'Brien*: un mètode corrector que redueix els errors i assegura el compliment de la condició de contorn a superfície. L'ajust serà desenvolupat a la Metodologia.

El mètode de la vorticitat sorgeix inicialment de formular l'equació de moviment (2.1) en termes de la vorticitat relativa ζ , això aplicant l'operador $\hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times$ als dos costats de l'equació, i canviant la variable vertical d'altura a pressió realitzant la transformació a coordenada isobàrica:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = -v\beta - (\zeta + f)\delta + \hat{k} \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \times \vec{\nabla} \omega \right) + \hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}_{fric} \quad (2.16)$$

L'equació de vorticitat vertical relativa (2.16) admet simplificacions als sistemes sinòptics de latituds mitjanes aplicant una *anàlisi d'escala*: un tipus d'estudi que simplifica les equacions estimant els termes més contributius per la dinàmica, mitjançant l'ús de funcions característiques i valors típics. Utilitzant aquesta anàlisi amb les expressions analítiques i els valors usals als sistemes sinòptics extratropicals (Apèndix 7.1), així com considerant només aquells termes dintre de l'ordre dominant ($\sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}$), l'equació de vorticitat se simplifica a la següent expressió:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta - v\beta - \delta f \quad (2.17)$$

Expressió que es relaciona directament amb les velocitats verticals ω a partir de l'equació de

continuitat (2.14), obtenint una igualtat d'on és possible aïllar explícitament la derivada vertical sobre ω i integrar verticalment els dos costats entre els nivells $p' = 0$ i $p' = p$:

$$\int_{\omega(p'=0)}^{\omega(p'=p)} \frac{d\omega}{dp'} dp' = \frac{1}{f_0} \int_0^p \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta + v\beta \right) dp' \quad (2.18)$$

On finalment aplicant la condició de velocitat vertical nul·la a la cima de l'atmosfera $\omega(p' = 0) = 0$, s'arriba a l'expressió integral que conforma el mètode de la vorticitat:

$$\boxed{\omega(p) = \frac{1}{f} \int_0^p \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta + v\beta \right) dp'} \quad (2.19)$$

Com també el mètode cinemàtic, el mètode de la vorticitat presenta dificultats per l'aplicació pràctica. La falta d'informació continua sobre el camp de vorticitats verticals relatives (tenint-se generalment a intervals de 6 - 12 h) genera estimacions crues de la derivada temporal $\partial_t \zeta$; sumat a això, aquesta derivada posseeix el mateix ordre de magnitud que $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta$, però generalment amb signe oposat, provocant una tendència a anul·lar-se dintre de l'integrand i causant grans errors de la velocitat vertical ω si aquests dos termes no són estimats de forma precisa.

2.2 Teoria quasigeostròfica. Equacions Omega.

La consideració d'un sistema sinòptic en latituds mitjanes fora de la capa límit, va permetre reduir les equacions i introduir el concepte de geostrofia i el corresponent vent geostròfic, descrivint així la dinàmica atmosfèrica en termes de l'equilibri entre gradients del geopotencial i forces de Coriolis. No obstant, aquesta aproximació no permet que els sistemes geostròfics evolucionin en el temps, essent una limitació important a l'hora de descriure la formació i evolució de les grans estructures horitzontals pròpies d'aquestes dimensions i localització.

La teoria quasigeostròfica de l'atmosfera (TQG) respon a aquesta limitació, introduint una nova interpretació a l'estructura i evolució dels sistemes sinòptics de latituds mitjanes, amb models més senzills i compatibles amb les observacions, això partint de la consideració que el gradient de pressions i la força Coriolis són en quasiequilibri, donat que l'acceleració inercial no és del tot menyspreable. En conseqüència, el camp de velocitats horitzontals conté una part geostròfica i una ageostròfica $\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_a$. Aquesta teoria més completa permet entendre únicament partint del camp $\Phi(x, y, p, t)$ i per una atmosfera completament seca, els processos que formen els moviments verticals i l'evolució temporal del geopotencial, això mitjançant potents equacions de diagnòstic de la velocitat vertical ω i la tendència $\chi = \partial_t \Phi$.

La primera assumpció fonamental que compon la TQG consisteix en el fet que el quocient entre acceleració inercial i Coriolis és petit, implicant que el component geostròfic del camp de vents és molt més gran que l'ageostròfic ($|\vec{V}_g| \gg |\vec{V}_a|$), i per tant l'últim podrà ser negligit en alguns termes de les expressions, però no tots, implicant que el camp de velocitats no ha de ser necessàriament geostròfic per tenir equacions vàlides.

$$\frac{\text{acceleració inercial}}{\text{acceleració Coriolis}} = \frac{|d\vec{V}/dt|}{|-f\hat{k} \times \vec{V}|} \sim \frac{|\vec{V}_a|}{|\vec{V}_g|} \leq 0.1 \longrightarrow \vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_a \approx \vec{V}_g \quad (2.20)$$

La segona assumptió resideix en el paràmetre Coriolis i com dependent de la situació segueix la formulació del pla-f o β . Pels sistemes sinòptics de latituds mitjanes, el quocient entre la component addicional del pla- β per un interval meridional típic, és molt més petit que el valor constant f_0 del pla-f. Llavors, la variació meridional és menyspreable enfront de f_0 , reduint al pla-f certs termes de les equacions, però no tots.

$$\frac{\text{terme meridional pla-}\beta}{\text{terme constant pla-f}} = \frac{|\beta y|}{|f_0|} \leq 0.1 \longrightarrow f(y) = f_0 + \beta y \approx f_0 \quad (2.21)$$

Les consideracions que conformen la TQG, tenen implicacions immediates sobre els termes a les equacions de velocitat geostrofica, vorticitat relativa i la forma euleriana de la derivada temporal:

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \vec{\nabla}_p \Phi \xrightarrow{\text{TQG}} \vec{V}_g \approx \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \vec{\nabla}_p \Phi = (u_g, v_g) = \frac{1}{f_0} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (2.22)$$

$$\zeta = \hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = \hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_a) \xrightarrow{\text{TQG}} \zeta_g \approx \hat{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \vec{\nabla}_p^2 \Phi \quad (2.23)$$

$$\frac{d_p}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_a) \cdot \vec{\nabla}_p \xrightarrow{\text{TQG}} \frac{d_g}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p \quad (2.24)$$

Coneixent doncs les implicacions que tenen les aproximacions usades i la seva aplicació als paràmetres i operadors claus en la descripció dinàmica de l'atmosfera, es possible reformular baix aquest marc teòric algunes de les principals equacions a l'apartat anterior, essent aquestes l'equació de moviment sinòptic a latituds mitjanes (2.8), l'equació termodinàmica (2.9) adiabàtica ($dQ = 0$) i l'equació de vorticitat relativa a sistemes sinòptics extratropicals (2.17):

$$\text{Eq. del moviment (2.17)} \xrightarrow{\text{TQG}} \frac{d_g \vec{V}_g}{dt} = -f_0 \left(\hat{k} \times \vec{V}_a \right) - \beta y \left(\hat{k} \times \vec{V}_g \right) \quad (2.25)$$

$$\text{Eq. termodinàmica (2.9) i } T = -P \partial_p \Phi / R \xrightarrow{\text{TQG}} -\frac{p}{R} \frac{\partial \chi}{\partial p} = -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p T + \omega \sigma \frac{p}{R} \quad (2.26)$$

$$\text{Eq. de la vorticitat relativa (2.23)} \xrightarrow{\text{TQG}} \frac{1}{f_0} \vec{\nabla}_p^2 \chi = -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p (\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (2.27)$$

La nova equació del moviment mostra la millora que suposa la TQG respecte a la dinàmica purament geostrofica, essent que el camp de vents geostrofs $\vec{V}_g$ ara si pot evolucionar i desenvolupar-se amb el temps, mitjançant en part de la component ageostrofica del vent i de la part meridional del paràmetre Coriolis. A més, es pot veure l'efectivitat del seu formalisme teòric, essent que les noves expressions per l'equació termodinàmica i de vorticitat relativa, es poden deixar formulars com equacions de diagnòstic de la tendència χ , així com només en funció del geopotencial $\Phi(x, y, p, t)$ si és desitjat.

La reformulació de les equacions prèvies dintre del marc teòric de la TQG, permet arribar amb algunes manipulacions, a un dels principals resultats teòrics oferits per aquesta teoria de l'atmosfera: les equacions Omega. Aquestes són un conjunt d'equacions de diagnòstic de la velocitat vertical ω de gran aplicació pràctica als sistemes sinòptics de latituds mitjanes, donat que permeten obtenir nocions de la dinàmica vertical amb resultats més precisos i menys sorollosos que els mètodes primitius, partint només de conèixer del geopotencial.

Les equacions Omega utilitzades per aquest estudi són tres: la *clàssica* (EOC), la de *Trenberth* (EOT) i la del *vector* $\vec{Q}$ (EOQ), posseint totes la mateixa estructura, però distintes formulacions del forçament al qual estan sotmeses. En aquestes, només la primera i l'última surten de la manipulació de les equacions QG prèvies, mentre que l'EOT és una reformulació del forçament clàssic amb diverses consideracions especialment bones a la troposfera mitja i alta.

L'obtenció de l'EOC parteix d'usar les equacions QG de la vorticitat relativa i termodinàmica, mitjançant la combinació $R\vec{\nabla}_p^2[2.26]/p\sigma + f_0\partial_p[2.27]/\sigma$ per eliminar la tendència χ de les equacions, així com d'assumir un paràmetre d'estabilitat horitzontalment uniforme $\sigma(x, y, p) = \sigma(p)$ per poder treure els gradients horitzontals sobre aquest terme. Amb aquest desenvolupament es pot aïllar la velocitat vertical ω i tenir l'equació desitjada:

$$\left(\vec{\nabla}_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \omega = -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p(\zeta_g + f_0)\right] - \frac{R}{\sigma p} \vec{\nabla}_p^2 \left[-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p T\right] = A + B \quad (2.28)$$

L'equació de diagnòstic resultant és una EDP lineal que permet determinar les velocitats verticals coneixent els forçaments A (advecció geostrofica diferencial de vorticitat) i B (laplaciana de l'advecció geostrofica de temperatura) junt amb una condició inicial i de contorn sobre ω . Algunes observacions notables són com els termes A i B incrementen en magnitud a situacions de baixes pressions (parts altes de la troposfera) i estabilitats ($\sigma \ll 1$), així com que el formalisme QG segueix presentant al poder escriure tot el forçament només en funció del geopotencial.

Si bé la formulació clàssica és directa i sense quasi assumpcions, presenta inconvenients. Les derivades verticals al forçament impliquen conèixer les dades i fer càlcul a diversos nivells isobàrics, a més que els termes A i B poden presentar signes contraris, requerint per tant suma precisió en la determinació del geopotencial per evitar errors al càlcul de ω . Per afrontar aquestes dificultats, existeixen les formulacions de Trenberth i del vector $\vec{Q}$, expressions de les quals s'obtenen forçaments que es poden calcular coneixent només les dades del nivell isobàric d'interès, així com aplicant únicament operacions que actuen de formes horitzontals.

La formulació de Trenberth parteix d'introduir la derivada vertical dintre la component A i de ficar la laplaciana dintre del terme B, substituint a l'últim el gradient de temperatures amb les relacions del vent tèrmic (2.11) (per $f = f_0$). El terme B després de diverses operacions tindrà una expressió amb termes de deformació del camp de vents, termes que són menyspreables a la troposfera mitjana i alta, arribant llavors a què el nou forçament està format per adveccions de la vorticitat vertical relatives geostrofica (ζ_g) i planetàries (f), per part de la cisalla del vent tèrmic. No obstant, el segon terme és molt més petit i per tant menyspreable enfront del primer, arribant així a l'expressió de diagnòstic final de l'EOT:

$$\left(\vec{\nabla}_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \omega = \frac{2f_0}{\sigma} \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta_g \quad (2.29)$$

Aquesta forma d'expressar l'equació Omega, ofereix un model ràpid i fàcil per estimar moviments verticals a escales sinòptiques, usant un forçament que si bé no és del tot equivalent al clàssic, és una combinació aproximada dels forçaments A i B en funció del geopotencial al nivell d'estudi.

L'última formulació de l'equació Omega correspon a la del vector $\vec{Q}$. Aquesta versió de l'equació sorgeix d'un extens desenvolupament que parteix de l'equació QG de moviment (2.25), termodinàmica (2.26) i la cisalla del vent tèrmic (2.11), on amb diverses manipulacions i aplicacions de derivades, s'obté una expressió com les anteriors, però amb un forçament donat com una quantitat proporcional a la divergència horitzontal d'un camp de vectors " $\vec{Q}$ ":

$$\left(\vec{\nabla}_p^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = -2\vec{\nabla}_p \cdot \frac{-R}{\sigma p} \left(\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} \cdot \vec{\nabla}_p T, \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} \cdot \vec{\nabla}_p T \right) = -2\vec{\nabla}_p \cdot \vec{Q} \quad (2.30)$$

Aquesta nova formulació té nombrosos avantatges, essent que l'absència de derivades verticals fa que cada camp vectorial sigui exclusiu del nivell i formulat només amb les dades d'aquest, tampoc presenta el problema de conflicte entre termes A i B al forçament, i gairebé no fa ús d'aproximacions. L'èxit aquesta formulació també resideix en poder inferir la dinàmica vertical només observant el caràcter vectorial i mòdul del camp de vectors $\vec{Q}$ sobre el domini sinòptic.

Donat que la diferència entre equacions Omega és només al forçament, es pot establir a totes la mateixa relació de signes entre forçament i velocitat vertical. L'operador laplacià és una mesura de la diferència entre un punt i els seus veïnats més pròxims, tenint que un valor positiu (negatiu) implica que el punt està davall (damunt) dels veïnats. Aquest anàlisi sobre $F \sim \vec{\nabla}_p^2 \omega$, comporta que a un forçament positiu es tindrà $\omega < 0$ i per tant ascensos, mentre que per un forçament negatiu $\omega > 0$ descensos. És important veure que per l'equació Omega (2.30) implicarà que per convergències del camp de $\vec{Q}$ haurà ascensos i per divergències descensos.

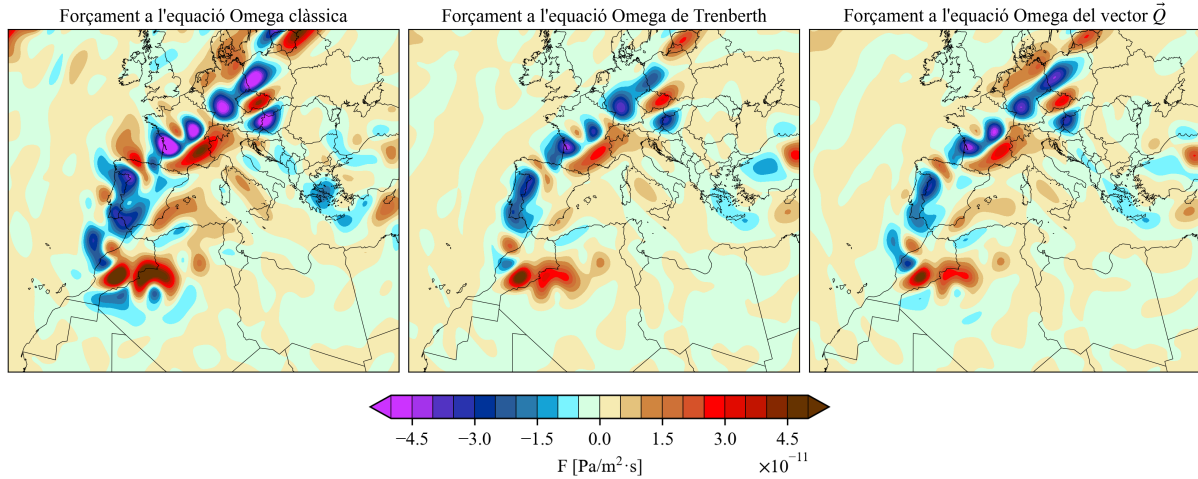


Figura 2: Estructura, magnitud i signe del forçament generat per cada una de les formulacions introduïdes de l'equació Omega. Les dades usades corresponen al geopotencial i temperatures a 500 hPa del reanàlisi ERA5 a les 00 UTC del 20 de gener 2020.

2.3 Episodi ciclònic mediterrani: La borrasca Glòria.

La borrasca Glòria va ser un temporal amb fortes ratxes de vent, pluges, neu i fenòmens costaners, que es va iniciar durant la matinada del 19 de gener del 2020 i va tenir una durada aproximada de sis dies [7]. Aquesta es va tractar d'un fenomen meteorològic de caràcter excepcional, tant als registres captats durant aquest període (vents de 130 km/h, precipitacions i

neus acumulades de fins a 400 mm i 50 cm respectivament, etc.[6]), com als impactes materials, costaners, inundacions i talls de comunicacions que va provocar durant el seu temps de vida.

La borrasca va néixer el 17 de gener del 2020 a l'oceà Atlàntic nord com una pertorbació depressionària superficial. En el transcurs de només 24 hores, la pertorbació ràpidament es va desenvolupar en altura i desplaçar cap a l'est, pràcticament duplicant la seva mida i localitzant-se al mar Cantàbric a la mitjanit. El dia 19 marca l'inici de la borrasca Glòria amb la intensificació de la baixa i el seu trajecte fins a arribar al mar Mediterrani Occidental, generant durant el viatge grans formacions de níguls afectant el nord i est de la península Ibèrica i les Illes Balears amb fortes pluges i vents. La depressió corresponent a la borrasca Glòria només va durar unes 24 hores, donat que al llarg del dia 20 durant el seu desplaçament al sud, va ser absorbida per una baixa de gran mida i intensitat centralitzada al Mar d'Alborán. Paral·lelament, la intensificació d'una l'alta sobre les Illes Britàniques va induir un fort gradient de pressions, provocant grans ratxes de vents sobre Balears i el Litoral Mediterrani que a més, transportaven grans quantitats d'humitat, estimulants processos de saturació per ascens gràcies a corrents verticals de notable velocitat, afavorides per la baixa pressió i inestabilitat de la zona (Figura 3).

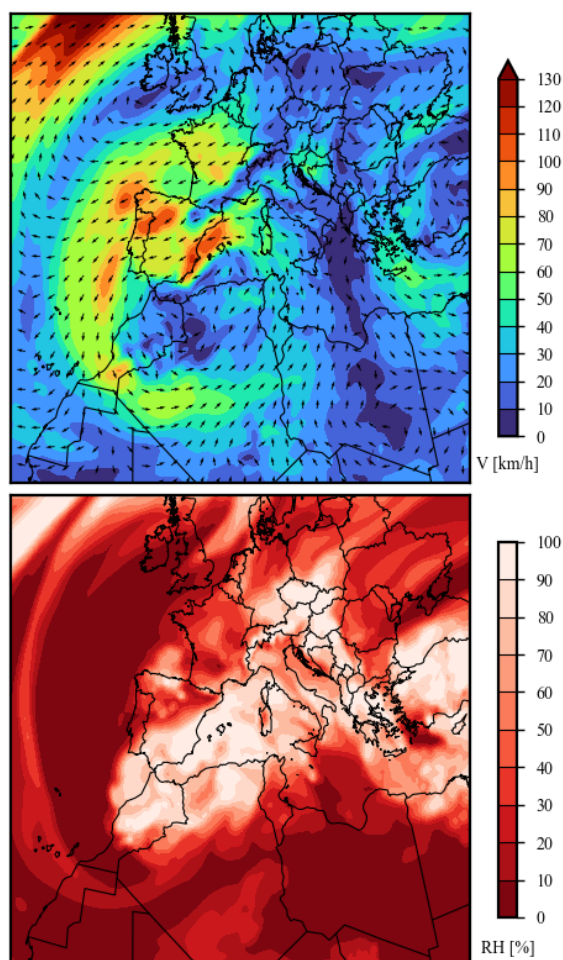


Figura 3: Distribució de les ratxes i mòdul del camp de vents així com la humitat relativa, presents al nivell isobàric de 850 hPa segons les dades de la reanàlisi ERA5 pel dia 20 de gener 2020 a les 00 UTC.

A finals del dia 21, la baixa que va absorbir a Glòria es va començar a debilitar, però encara va ser activa al llarg del dia 22 i mantenint les precipitacions i ratxes de vent. El dia 23 marca el final de la borrasca a les Illes Balears i el Litoral Llevantí, passant aquesta a localitzar-se al sud de la península Ibèrica on va causar calabruix i alguns desbordaments de rius, per més endavant desplaçar-se en direcció a Itàlia, on el dia 26 va acabar de dissipar-se.

A l'Arxipèlag Balear, els dies de major activitat meteorològica extrema per part de la borrasca Glòria (considerem la borrasca com els esdeveniments meteorològics entre el 19 i 23 de gener), va ser des del migdia del 19 fins finals del 21 de gener 2020, destacant sobre tot el dia 20 (Els camps d'alçada geopotencial i isohipses a la mitjanit dels tres dies es poden observar a la Figura 4). Durant aquest període de temps, Balears va estar baix el nucli nuvolós de la borrasca, patint fortes precipitacions, intenses ratxes de vents i gran presència d'humitat. Els estudis diagnòstics de velocitats verticals seran centrats a aquests tres dies, veient així la presència, magnitud i signe d'aquests moviments durant fenòmens meteorològics extrems.

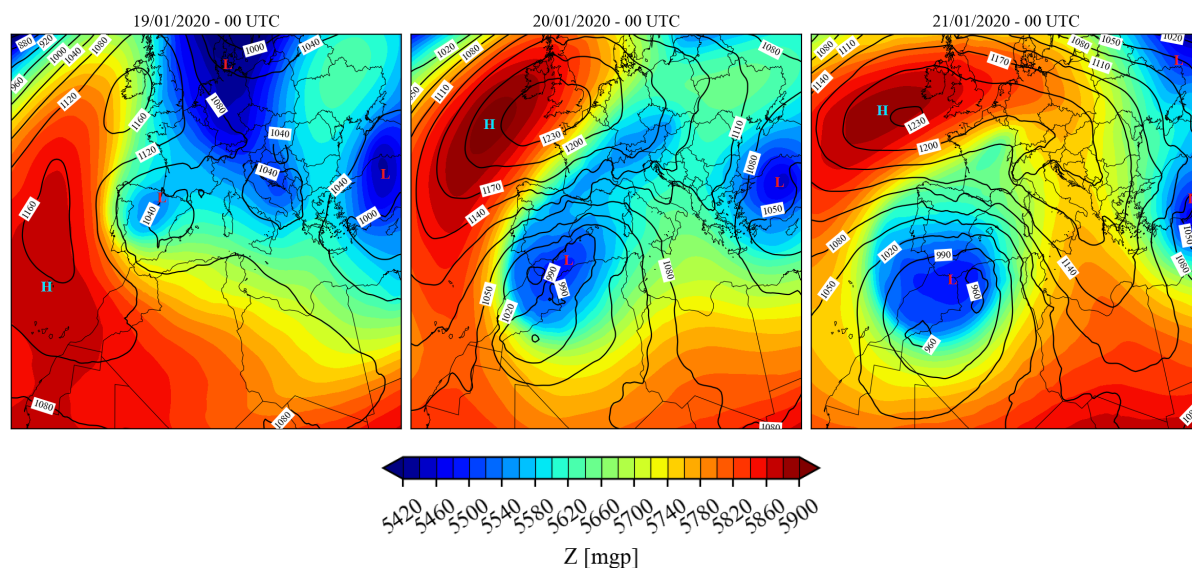


Figura 4: Distribució d'isohipses a 900 hPa i del camp d'alçada geopotencial a 500 hPa segons les dades corresponents al reanàlisi ERA5 a les 00 UTC dels dies 19, 20 i 21 de gener 2020.

3 Metodologia

Les equacions de diagnòstic de les velocitats verticals presentades estan formulades sobre certes variables meteorològiques, depenent d'aquestes tant de forma explícita com implícita. Llavors, l'ús de les equacions està condicionat al coneixement previ de les variables, venint aquesta informació proporcionada en forma de dades obtingudes a través d'observacions i models. No obstant, per la seva alta resolució, tècniques de postprocessat han de ser utilitzades per eliminar variacions de mesoescala i fer-les aplicables a les expressions sinòptiques. Amb això i tot, a l'aplicació pràctica no és suficient amb el coneixement de les dades tractades, la complexitat de les equacions fa impossible l'ús de tècniques de resolució o integració analítica, havent de desenvolupar i aplicar mètodes numèrics per trobar solucions aproximades, però d'alta precisió.

En aquest apartat són introduïts i explicats el conjunt de dades primitives de les quals fa ús el treball, la seva conversió a les variables d'interès dintre del sistema d'unitats adient, la disposició sobre una malla rectangular sinòptica i la tècnica de postprocessat usada. Una vegada exposada tota la manipulació de les dades, seran finalment introduïts els algorismes numèrics aplicats per resoldre les equacions de diagnòstic.

3.1 Anàlisi de les dades ERA5 i del pronòstic TRAM-UIB.

Les dades utilitzades per la resolució de les equacions tant de diagnòstic com pronòstic provenen del servei ERA5 per part de l'ECMWF (Centre Europeu de Previsions Meteorològiques a Termini Mitjà). Aquest servei és una reanàlisi que combina observacions meteorològiques arreu del món, amb resultats donats per models, generant sets de dades consistents baix l'ús de les lleis físiques.

Proporcionades pel tutor, les dades d'ERA5 utilitzades corresponen als dies 18 fins a 23 de gener 2020 cada sis hores (00, 06, 12 i 18 UTC), i contenen el camp de temperatures ($^{\circ}\text{C}$), l'alçada geopotencial (mgp) i les components horitzontals u i v del camp de vents (m/s), tots cada 27

km dintre d'una àrea de $8073 \times 6453 \text{ km}^2$ pel conjunt de nivells isobàrics cada 50 hPa entre 1000 i 50 hPa. Addicionalment, també es disposa d'altres camps com la humitat relativa (%), la temperatura superficial ($^{\circ}\text{C}$), la pressió al nivell de la mar (hPa) i el del valor del paràmetre Coriolis (s^{-1}) a cada punt de l'àrea compresa pel domini sinòptic.

Les dades dels pronòstics obtinguts fent ús del model TRAM-UIB, també són proporcionades pel tutor. Aquestes dades corresponen a les velocitats verticals sobre un sistema en coordenada vertical d'altura (m/s), per quatre possibles combinacions relacionades amb l'ús o no de tota la física sense aproximacions i l'orografia, tots partint dels mateixos camps de dades inicials d'ERA5 (18 de gener 2020 - 00 UTC). Els resultats de les velocitat verticals de pronòstic proporcionades són als nivells isobàrics de 850, 500 i 250 hPa, i cadascuna està horitzontalment distribuïda sobre una àrea aproximada de $5725 \times 4214 \text{ km}^2$. En quant el pas de malla, s'ha de tenir en compte que el model TRAM-UIB resol les equacions sobre malles triangulars de 25 km de costat, que referides a una tradicional quadrada representa una resolució equivalent a $\approx 2/3 \cdot dx$, tenint cada punt del pronòstic a uns 17 km ([Domini MR a TRAM / MeteoUIB](#)).

3.2 Manipulació de les dades. Disposició i filtratge.

Les dades als arxius ERA5 requereixen modificacions inicials, perquè no tots els camps són a les unitats correctes o corresponen a les variables utilitzades per les equacions. La conversió dels camps a unitats del sistema internacional és un pas trivial, però important d'esmentar; per altra banda, l'adquisició de les dades geopotencial Φ necessàries per a la TQG requereix més detalls. Per simplicitat, és considerada constant l'acceleració gravitatòria experimentada per les partícules, per tant, les dades d'alçada geopotencial "Z" d'ERA5 han sigut transformades a Φ fent ús de la relació (2.6) amb l'acceleració gravitatòria al nivell de la mar $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$.

Les dades d'ERA5 utilitzades contenen el valor d'una variable meteorològica sobre el domini sinòptic per diversos nivells isobàrics. El conjunt de les $1.44 \cdot 10^6$ dades presents a cada arxiu distribuïdes arreu del sistema d'estudi, han sigut compactades a malles tridimensionals regulars de 240 files (F), 300 columnes (C) i 20 nivells (N) tals que la pressió decreix amb cada nivell superior, tenint uns passos de malla $\Delta x = \Delta y = 27 \text{ km}$ i $\Delta p = 50 \text{ hPa}$. Aquesta disposició de la informació simplifica la gran quantitat d'arxius a només 24 malles rectangulars per variable meteorològica, però sobretot serà necessària per a la posterior resolució numèrica de les equacions de diagnòstic. Addicionalment, donada la practicitat d'aquesta distribució de la informació, els resultats de pronòstic del model mesoescalar TRAM-UIB són disposats igual, quedant la velocitat vertical compactada a malles tridimensionals de pressió decreixent amb el nivell.

L'alta resolució de les dades ERA5, comporta la presència d'aspectes i variacions pròpies del comportament mesoescalar de l'atmosfera. Això no és un inconvenient pel model mesoescalar TRAM-UIB, però si pel mètode de la vorticitat i les equacions Omega aptes només a sistemes sinòptics de latituds mitjanes. Per poder aplicar aquestes equacions i adquirir resultats acurats, les dades d'ERA5 han sigut tractades baix un postprocessat per extreure el comportament sinòptic. Si bé el mètode cinemàtic sorgeix de l'equació de continuïtat en coordenada isobàrica i no d'una anàlisi de gran escala a latituds mitjanes, també farà ús de dades postprocessades per donar resultats sinòptics i així ser comparable amb la resta d'equacions de diagnòstic.

El mètode usat ha consistit en l'aplicació de filtres gaussians sobre cada nivell isobàric individual, per a la capacitat que tenen per reduir el soroll i suavitzar els camps de dades, obtenint així les estructures ondulatòries típiques d'aquestes escales i latituds. Per controlar el grau de filtratge, s'ha establert una baixa desviació estàndard σ a favor de poder iterar el filtre. La convenció establerta del nombre de filtratges ha sigut en funció de les estructures i magnituds sorgides en resoldre els mètodes de diagnòstic, tenint l'aplicació del filtre 15 vegades pel mètode cinemàtic i les equacions Omega, mentre 30 pel mètode de la vorticitat, tots amb $\sigma = 1$ (punts de malla).

3.3 Mètodes de diferències finites sobre malles rectangulars.

El caràcter analíticament irresoluble de les equacions de diagnòstic vistes, comporta la necessitat d'usar mètodes numèrics per trobar solucions de la velocitat vertical. El mètode utilitzat en aquest treball és el de diferències finites per malles rectangulars, del tipus centrat per la seva major precisió (2n ordre), mentre que als contorns són avançades o endarrerides (1r ordre). Llavors, una variable “ θ ” discretitzada a una malla tridimensional amb files (s), columnes (r) i nivells (m) ($\theta_{s,r,m}$) (per aquest treball m decreix amb la pressió), tindrà les seves derivades parcials donades de forma aproximada segons les expressions:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{\theta_{s,r+1,m} - \theta_{s,r-1,m}}{2\Delta x} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} \approx \frac{\theta_{s+1,r,m} - \theta_{s-1,r,m}}{2\Delta y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} \approx \frac{\theta_{s,r,m-1} - \theta_{s,r,m+1}}{2\Delta p} \quad (3.1)$$

Les quals es poden també utilitzar per trobar la resta d'operadors diferencials com a diferències finites (Apèndix 7.2). Amb el conjunt d'aquestes expressions, es poden desenvolupar algorismes numèrics capaços de solucionar aproximadament EDPs, això mitjançant la substitució de les derivades a l'equació diferencial per les expressions finites i amb diverses manipulacions, arribar a una equació (generalment iterativa) que aïlla la funció multivariable i retorna el valor numèric aproximat de la funció sobre cada punt de la malla.

Similarment, els operadors integrals a les equacions de diagnòstic també es resolen de formes aproximades. Les integrals sobre la pressió quan es realitzen a un sistema de nivells isobàrics molt propers, es poden calcular com la sumatòria fins al nivell desitjat p_0 “M” del producte entre la diferència de pressions i la mitjana de l'integrand avaluat a dos nivells isobàrics consecutius:

$$I = \int_p^{p_0} \Gamma(p, \dots) dp' \approx \sum_{m=1}^M \left[\frac{\Gamma_{s,r,m-1} + \Gamma_{s,r,m}}{2} \Delta p \right] = \sum_{m=1}^M \bar{\Gamma}_{m-1,m} \Delta p \quad (3.2)$$

Coneixent les bases dels mètodes numèrics utilitzats per resoldre integrals o EDPs de forma aproximada sobre una malla rectangular, són introduïts els algorismes aplicats sobre les cinc equacions diagnòstiques presentades per determinar numèricament les velocitats verticals.

Mètode cinemàtic (MC)

El mètode cinemàtic (2.15) consisteix a integrar respecte a la pressió, la divergència horitzontal del camp de vents per cada nivell isobàric des del nivell p fins a un de referència p_0 . L'aplicació dels mètodes numèrics de diferències i integrals finites resulta en l'expressió aproximada següent:

$$\omega(p) = \omega(p_0) + \int_p^{p_0} \delta dp \longrightarrow \omega_M = \sum_{m=1}^M [\omega_{m-1} + \bar{\delta}_{m-1,m} \Delta p] \quad M = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

Expressió que permet calcular ω a cada nivell isobàric de forma iterativa. Malgrat això, el mètode és de difícil aplicació pràctica deguda l'alta incertesa de la velocitat vertical per errors de mesura en l'horitzontal i l'incompliment de la condició de contorn a l'alta troposfera on $\omega(p_0) \neq 0$. La solució al problema ve donada per l'ajust de O'Brien: una correcció que assegura el compliment del contorn als dos costats de la troposfera, donant resultats físicament acceptables.

La correcció del mètode parteix de calcular les velocitats verticals a cada nivell amb l'equació iterativa (3.3), guardant els resultats del nivell base " ω_0 " ($= 0$) i el final " ω_N " ($\neq 0$). Amb aquests resultats, la divergència horitzontal mitjana i en conseqüència les noves velocitats verticals corregides a un nivell m , es calculen fent ús de la següent recurrència:

$$\bar{\delta}'_{m-1,m} = \bar{\delta}_{m-1,m} - \frac{2m(\omega_N - \omega_0)}{N(N+1)\Delta p} \longrightarrow \omega'_m = \omega'_{m-1} + \bar{\delta}'_{m-1,m}\Delta p \quad (3.4)$$

Finalment, manipulant l'expressió corregida amb el valor de la divergència modificada i tenint en compte la relació de recurrència al sumatori de (3.3), s'arriba l'algorisme numèric de O'Brien utilitzat per corregir els resultats previs del mètode cinemàtic a cada nivell individual:

$$\boxed{\omega'_{s,r,m} = \omega_{s,r,m} - \frac{m(m+1)}{N(N+1)}(\omega_N - \omega_0)} \quad m = 0, \dots, N \quad (3.5)$$

Mètode de la vorticitat (MV)

El mètode de la vorticitat (2.19) calcula la velocitat vertical a un nivell de pressió p , integrant fins a aquest una funció Γ des d'una alta isobàrica p_0 propera al cim de l'atmosfera. No obstant, la integració analítica és impossible en ser l'integrand una funció complicada que involucra velocitats meridionals, amb derivades temporals i adveccions de la vorticitat vertical relativa, requerint tècniques de resolució numèrica partint de calcular l'integrand en diferències finites $\Gamma \approx \Gamma_{s,r,m}$.

Amb l'integrand calculat de forma aproximada i discretitzat sobre la malla, la resolució numèrica del mètode de la vorticitat s'obté partint de la condició de contorn $\omega_N = 0$ (alta troposfera), determinant la velocitat vertical per cada nivell inferior calculant la integral de forma iterativa segons l'expressió (3.2) fins a la isobàrica propera a al nivell isobàric desitjat "M":

$$\boxed{\omega_M = \sum_{m=N-1}^M \left[\omega_{m+1} + \frac{\Delta p}{f_{s,r}} \bar{\Gamma}_{m+1,m} \right]} \quad M = N-1, \dots, 0 \quad (3.6)$$

Equacions Omega quasigeostròfiques (EO)

Les equacions Omega de la TQG (2.28), (2.29) i (2.30) són un conjunt de EDPs formulades sobre la velocitat vertical que comparteixen la mateixa estructura $(\vec{\nabla}_p^2 + \kappa^2 \partial_p^2)\omega = F_i$ però distints forçaments F_i . Aquesta construcció comporta a què la resolució numèrica desenvolupada serà apta per les tres equacions Omega tractades al treball, només requerint substituir el forçament.

Baix estabilitat estàtica ($\sigma > 0$), l'equació Omega és a una EDP el·líptica amb derivades parcials de segon ordre, pel qual es pot resoldre numèricament amb l'algorisme de sobrerelaxació (SOR) a partir d'un valor inicial $\omega_{s,r,m}^0$ i condicions de contorn pel domini. Aquest algorisme numèric per

equacions el·líptiques, sorgeix de substituir els operadors diferencials per les expressions finites i mitjançant un llarg desenvolupament, obtenir una expressió iterativa (k) on queda aïllat el valor de la funció multivariable a cada punt de la malla per a la següent iteració. Replicant aquest desenvolupament per l'equació Omega QG general, definint el paràmetre $\lambda_m^2 = 2f_0^2/\sigma_m(\Delta p)^2$ i sobre una situació on la malla rectangular compleix $\Delta x = \Delta y = d$, resulta en l'adquisició de la següent expressió de l'algorisme SOR per l'equació Omega 3D:

$$\omega_{s,r,m}^{k+1} = \omega_{s,r,m}^k + \beta^{(m)} \frac{\omega_{s,r+1,m}^k + \omega_{s,r-1,m}^{k+1} + \omega_{s+1,r,m}^k + \omega_{s-1,r,m}^{k+1} + \frac{\lambda_m^2 d^2}{2} (\omega_{s,r,m+1}^k + \omega_{s,r,m-1}^{k+1}) - (4 + \lambda_m^2 d^2) \omega_{s,r,m}^k - d^2 F_{s,r,m}^{(i)}}{4 + \lambda_m^2 d^2} \quad (3.7)$$

$$s = 1, \dots, F - 1 \quad r = 1, \dots, C - 1 \quad m = 1, \dots, N - 1$$

L'algorisme SOR itera la solució obtinguda per aquesta expressió sobre sí mateixa indefinides vegades millorant en cada ocasió la precisió del resultat. La convergència a la solució definitiva (després de "K" iteracions) se satisfà quan per tots els punts de la malla, la màxima diferència absoluta entre la nova solució i la passada és menor que una tolerància desitjada:

$$\max(|\omega_{s,r,m}^K - \omega_{s,r,m}^{K-1}|) < \epsilon \quad (3.8)$$

Aquesta convergència a la solució final s'accelera introduint un paràmetre β , que posseeix un valor numèric entre 1 i 2. El millor valor que pot presentar només depèn de característiques horitzontals i dels paràmetres de l'equació al nivell, calculant-se mitjançant les expressions:

$$Z_m = \left(\cos \frac{\pi}{F} + \cos \frac{\pi}{C} \right) \frac{2}{4 + \lambda_m^2 d^2} \rightarrow c_m = \frac{2}{Z_m^2} - 1 \rightarrow \beta_{opt}^{(m)} = 1 + c_m - \sqrt{c_m^2 - 1} \quad (3.9)$$

Les equacions Omega usades en aquest treball són resoltes amb SOR sota una tolerància de $\epsilon = 10^{-5}$ Pa/s i usant el paràmetre β_{opt} propi de cada nivell isobàric per accelerar la convergència a la solució. Com condició inicial, es considera una situació sense moviments verticals $\omega_{s,r,m}^0 = 0$, pel qual tota la dinàmica en aquesta direcció s'origina únicament del forçament $F_{s,r,m}^{(i)}$ calculat prèviament mitjançant tècniques de diferències finites (Apèndix 7.2). La condició de contorn usada és la de velocitat vertical nul·la al primer i últim nivell (baixa i alta troposfera), a més de frontera nul·la per les cinc files i columnes que envolten cada nivell, quedant els resultats numèrics donats per l'algorisme compresos dintre de la malla interna (230 x 290 x 18).

4 Presentació i anàlisi de resultats

A continuació, s'exposen i estudien els resultats de les velocitats verticals obtingudes mitjançant la resolució de les equacions de diagnòstic, o a través del pronòstic ofert pel model TRAM-UIB. L'anàlisi consistirà en la comparació de les estructures, magnituds i signes determinades per cada mètode de diagnòstic, per després avaluar els pronòstics amb els millors resultats previs, veient les capacitats, l'aplicació pràctica de cada mètode i la capacitat predictiva de TRAM-UIB.

Els estudis diagnòstics seran realitzats als dies 19, 20 i 21 de gener 2020, on la borrasca Glòria va ser present sobre les Illes Balears i el Mediterrani Occidental causant fenòmens meteorològics adversos. Per altra banda, els estudis de pronòstic se centraran a una hora dels diversos dies disponibles. Les observacions seran realitzades al nivell de 500 hPa (troposfera mitja), on la propietat d'aproximada nul·la divergència, tendeix a provocar la presència dels valors màxims

de la velocitat vertical (ignorant efectes orogràfics). Addicionalment, en correspondre el dia 20 a les 00 UTC al moment àlgid de l'episodi ciclònic mediterrani que protagonitza el treball sobre Balears i el Nord d'Àfrica, seran observats també altres nivells disponibles propers a 500 hPa.

4.1 Comparació entre mètodes de diagnòstic primitius i quasigeostròfics

L'anàlisi comparativa inicia contrastant els resultats dels mètodes primitius de diagnòstic, respecte a aquells determinats a partir de les EO. La finalitat de l'apartat, és avaluar els resultats i l'aplicabilitat pràctica dels mètodes primitius, esclarint els inconvenients que duen a la necessitat de teories més complexes i precises del diagnòstic de velocitats verticals a sistemes sinòptics de latituds mitjanes, com és la TQG. Per visualitzar millor aquesta superioritat, seran utilitzades cada formulació de les EO, una per dia. Si bé serà part de l'estudi al pròxim apartat, es pot avançar que els resultats de cadascuna són molt semblants en formació i direcció dels moviments, fent totes les EO igual de vàlides per la comparació amb les equacions primitives.

El dia 19 de gener 2020 va correspondre a l'arribada de la borrasca Glòria al Mediterrani. Des del migdia fins a l'horabaixa, el sistema ciclònic ràpidament va recórrer tot el litoral Mediterrani de la península Ibèrica fins a arribar al Mar d'Alborán, provocant tot un seguit d'efectes en l'estabilitat estàtica i situació meteorològica de l'àrea. Resoldre les equacions diagnòstiques de velocitats verticals per aquests moments del dia, retorna els resultats exposats a la Figura 5:

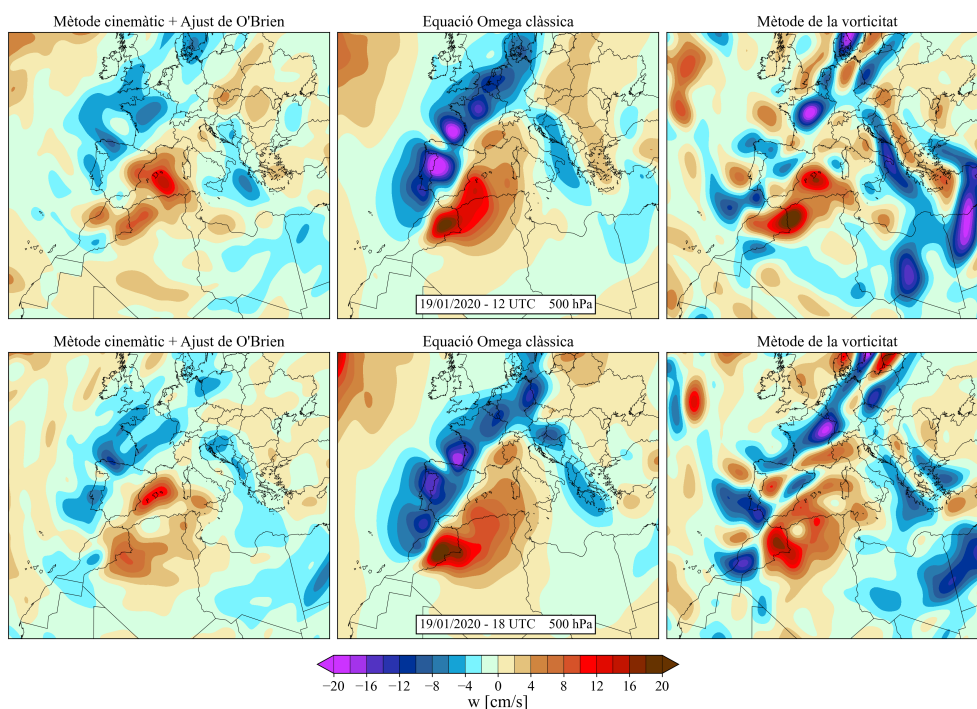


Figura 5: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals al nivell isobàric de 500 hPa, calculades resolent numèricament els mètodes primitius i l'EOC fent ús les dades de la reanàlisi ERA5 a les 12 i 18 UTC del dia 19 de gener 2020.

La resolució de les equacions resulten en un grup d'estructures de la velocitat vertical molt destacables sobre Europa, el nord-oest d'Àfrica i el Mediterrani, tenint que tant els mètodes primitius com l'EO presenten notables similituds en la localització i direcció vertical de l'aire. Els mètodes diagnòstics coincideixen en la presència de grans àrees amb fortes descendències

al llarg d'Europa en paral·lel a la costa Atlàntica, i d'altres destacables generalment sobre els Balcans. La situació dels principals corrents ascendents queda per tots els mètodes sobre el Mediterrani Occidental i el nord-oest d'Àfrica, coincidint amb la presència i pas de la borrasca.

Simultàniament, hi ha diferències importants. Als moments del dia 19 observats, el MC presenta les velocitats verticals més dèbils de tots, amb màxims de $\pm 12-14$ cm/s sobre les principals àrees d'activitat vertical, àrees on l'EO i el MV assumeixen valors de $\pm 16-20$ cm/s o més. Hi ha disparitats al posicionament sobre el domini dels màxims moviments verticals, on el MC situa els màxims ascensos sobre Balears, mentre que l'EO i el MV els col·loca principalment sobre el nord-oest d'Àfrica, ara que també presenten ascensos forts a Balears. Per altra banda, el MC i l'EO coincideixen més als descensos màxims, on el MV només a alguns i sobreestimant àrees no tan considerades per la resta. També es veu com els mètodes primitius diagnostiquen la presència de zones amb importants moviments verticals sobre la Mar Llevantina, Egipte i Líbia, zones que no són tan importants per l'EO al migdia o l'horabaixa. No obstant, la diferència més visible entre els resultats, resideix en la forma que són generades les estructures, podent observar-se com a pesar del filtratge dels camps de velocitats horitzontals, correccions i anàlisis d'escala orientat a dominis sinòptics de latituds mitjanes, els mètodes primitius retornen formacions més sorolloses, sobretot el MV que presenta moltes variacions en mida, magnitud i direcció vertical, respecte a aqueixes més suaus, extenses i de caràcter vertical ben definit de l'EO.

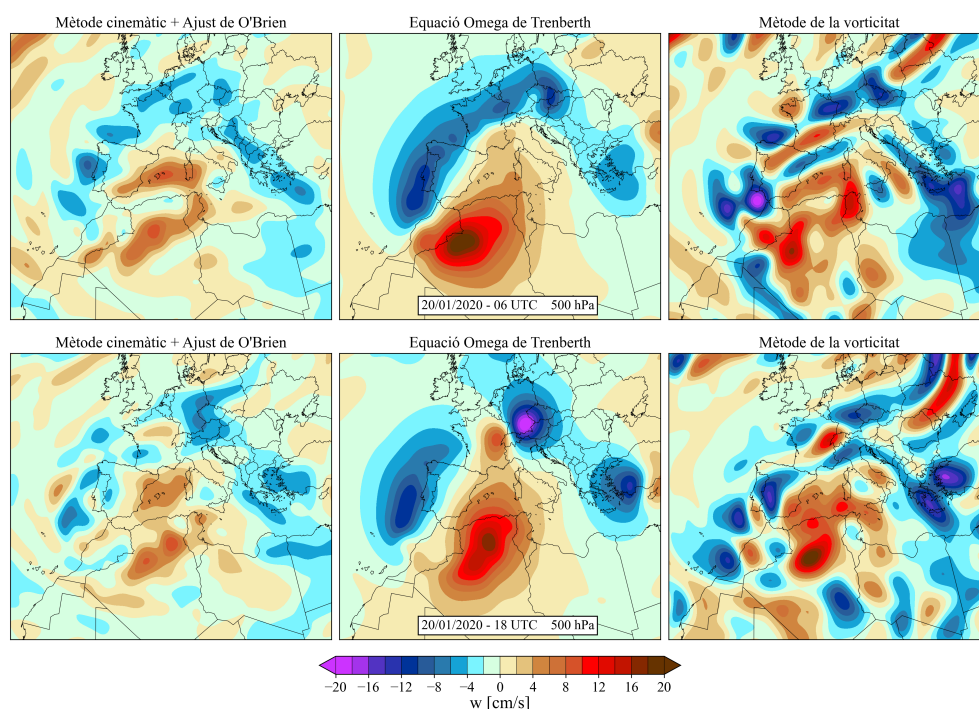


Figura 6: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals al nivell isobàric de 500 hPa, calculades resolent numèricament els mètodes primitius i l'EOT fent ús les dades de la reanàlisi ERA5 a les 06 i 18 UTC del dia 20 de gener 2020.

El dia 20 va correspondre al cim de la borrasca Glòria al Mediterrani Occidental, amb l'arribada de la depressió Atlàntica a la costa Africana de la Mar d'Alborán, on es va intensificar i mantenir al llarg del dia. Seguidament, el dia 21 va marcar l'inici del declivi de la borrasca a l'àrea, amb una debilitació progressiva del cicló sobre la costa Africana i el moviment del nucli depressionari

en direcció oest cap a Andalusia. Per aquests dos dies a algunes hores, la resolució numèrica de les equacions primitives, l'EOT i l'EOQ, retornen els resultats de la Figura 6 i 7:

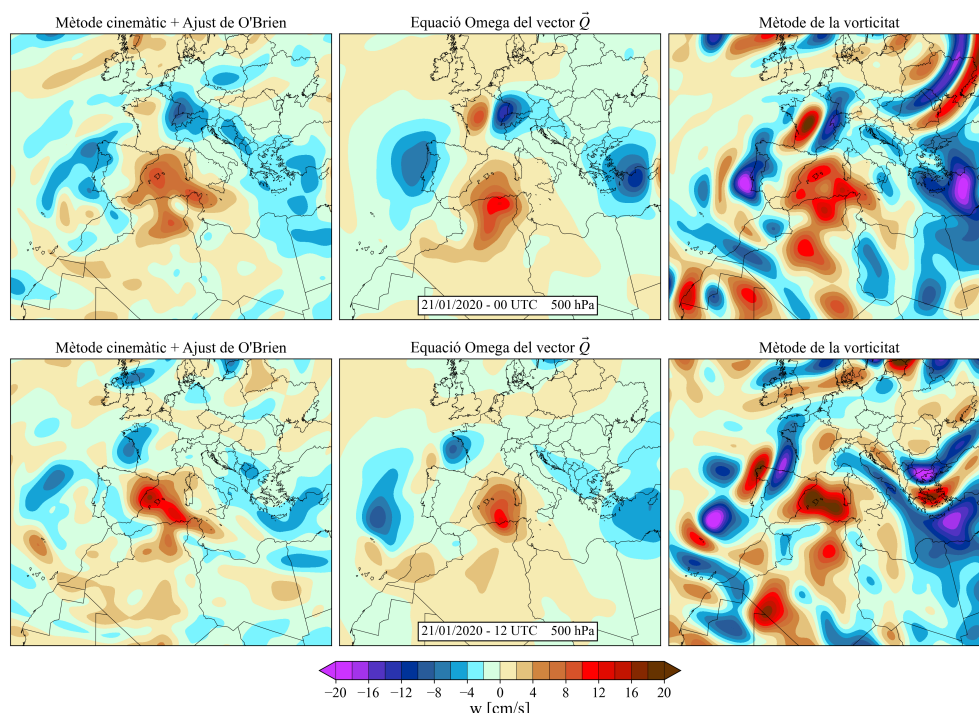


Figura 7: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals al nivell isobàric de 500 hPa, calculades resolent numèricament els mètodes primitius i l'EOQ fent ús les dades de la reanàlisi ERA5 a les 00 i 12 UTC del dia 21 de gener 2020.

Els resultats obtinguts de resoldre les equacions pels dos dies, tornen a mostrar semblances destacades entre les estructures diagnosticades. Al dia 20, tots coincideixen al matí en descendències rellevants als Balcans, la mar Egea i més fortes al llarg d'Europa seguint la costa Atlàntica, així com sobre l'oest de la península Ibèrica, l'Atlàntic, Centreeuropa i Turquia a l'horabaixa, situant les equacions al llarg del dia les ascendències més importants sobre el Mediterrani Occidental i el nord-oest d'Àfrica, en concordança amb la presència de Glòria, així com una petita formació ascendent sobre França a l'horabaixa. L'endemà, els resultats de diagnòstic tornen a mostrar coincidències, situant a la matinada descensos sobre l'Atlàntic i costa de Portugal, Centreeuropa, Turquia i la mar Llevantina, on al migdia el MC i l'EO mostren cert decrement dels descensos i l'activitat vertical, amb els més rellevants quedant a l'Atlàntic, el golf de Biscaia i la mar Llevantina, tenint els ascensos destacables sobre la mar Mediterrània Occidental, les seves costes al nord-oest d'Àfrica i de la península Ibèrica, a més que l'EO i el MV mostren a la matinada ascensos sobre França com el dia anterior, mentre que a l'horabaixa el MC i MV coincideixen en un fort increment dels ascensos sobre Balears.

Amb el nombre de resolucions realitzades als dies 20 i 21 junts les del dia 19, es fan visibles certes característiques negatives dels mètodes primitius. Les resolucions dels dies 20 i 21 tornen a mostrar que les solucions calculades amb el MC posseeixen generalment les estructures més dèbils i també amb valors màxims per davall de la resta. Es torna a veure baixa concordança entre equacions a l'hora de situar els punts de màxima velocitat vertical, tenint que si bé el MC i les EO coincideixen bastant als descensos màxims, no ho fan massa bé amb els ascensos,

generalment subestimant el primer aqueixes zones on per les EO es màxim. El MV pel seu costat si coincideix millor amb els ascensos màxims, però pareix presentar una tendència a la sobreestimació, essent aquesta inclinació també present tant a descensos màxims comuns com a distintes àrees d'enllà on les EO col·loquen els enfonsaments d'aire més rellevants. No obstant, el problema més notori i recurrent dels mètodes primitius ha de ser el soroll presentat per les seves solucions, especialment el MV on inclòs després d'haver-hi filtrat 30 vegades els camps de velocitats horitzontals, són molt evidents les dificultats que posseeix per generar zones extenses de comportament vertical ben definit, així com mostrant moltes estructures a zones on les EO i el MC no tenen massa o directament res. Addicionalment, el renou excessiu del MV al migdia del 21, pareixeria indicar que les imprecisions del mètode s'incrementen segons decreix l'activitat vertical al domini sinòptic, reforçant la caracterització d'aquest mètode com un molt sorollós.

El moment àlgid de Glòria va ser la matinada del dia 20, on l'increment de la depressió sobre la costa d'Algèria va disminuir l'estabilitat estàtica de l'àrea; a la vegada, l'augment de la pressió sobre l'alta Atlàntica va induir forts vents fins al nord-oest d'Àfrica envoltant la península Ibèrica i transportant molta humitat a la zona borrascosa. La resolució dels mètodes diagnòstics al moment ofereix els resultats de la Figura 8, on són també exposats altres nivells isobàrics.

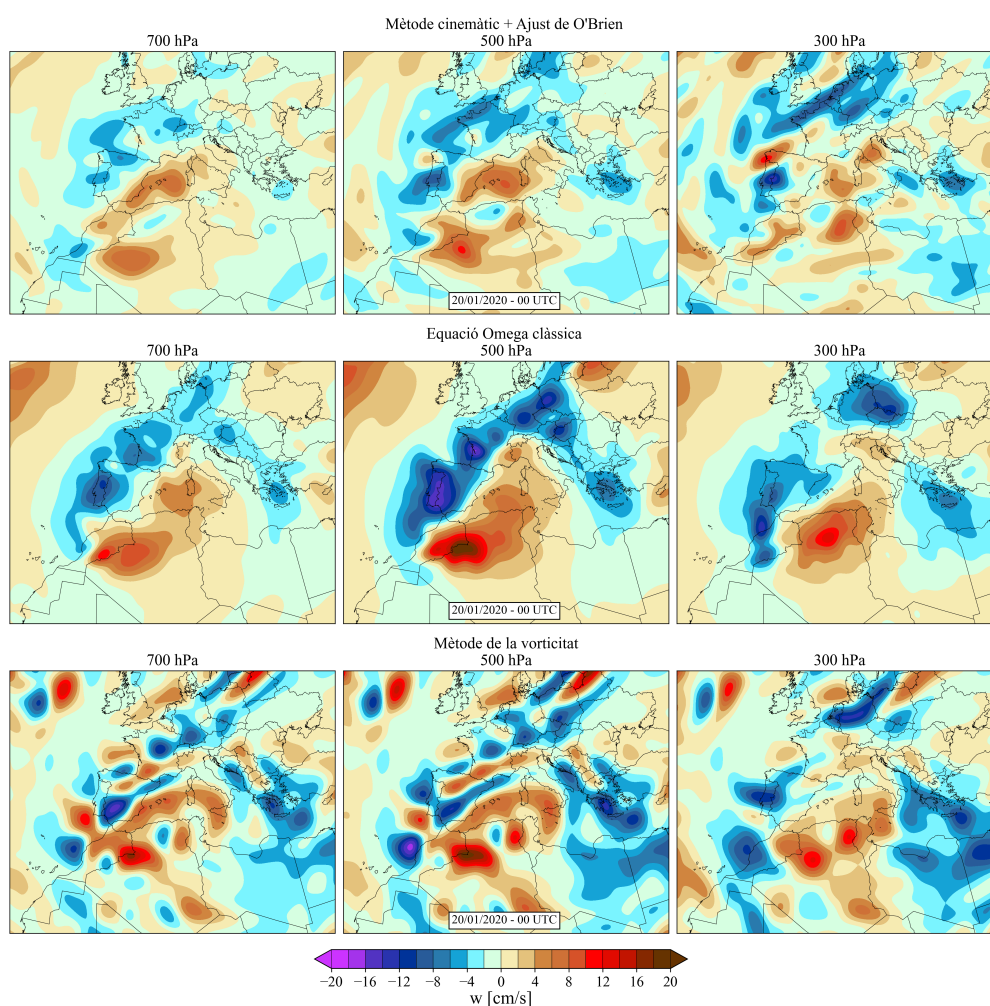


Figura 8: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals als nivells isobàrics de 700, 500 i 300 hPa, sorgides de resoldre numèricament ls mètodes primitius i l'EOC fent ús les dades de la reanàlisi ERA5 a la matinada del dia 20 de gener 2020.

Els diagnòstics de la velocitat vertical corresponents als nivells de 700, 500 i 300 hPa mostren per cada mètode individual semblances clares, esclarint que les formacions de moviments verticals no són dispers entre nivells sinó que existeix una relació estructural, de magnitud i direcció entre nivells propers, destacant l'observació de com el nivell de 500 hPa tendeix a posseir els màxims moviments verticals i les estructures més intenses, essent més notable a l'EO i el MV. Entre els distints mètodes, també s'observa la generació de formacions semblants al que respecta la localització i signe del moviment vertical a cada isobàrica, tenint per exemple a 700 i 500 hPa que tots coincideixen en fortes descendències al llarg d'Europa en paral·lel a la costa Atlàntica, sobre els Balcans i la mar Egea, mentre que a 300 hPa coincideixen sobre Centreeuropa, la península Ibèrica, el Marroc i la mar Egea i Llevantina, essent aquesta diferència respecte a els dos nivells previs possiblement originada en la major distància vertical separant 500 i 300 hPa que entre 500 i 700 hPa, no estant tan relacionats per proximitat. A més, com s'esperava de la presència de Glòria i tenint en compte resultats previs, els mètodes per tots els nivells estableixen les principals ascendències sobre el nord-oest d'Àfrica i la mar Mediterrània Occidental.

Es continua tenint que les solucions dels mètodes primitius són renoueres a tots els nivells, on l'exposició de diverses isobàriques mostra com aquestes imprecisions i sorolls s'incrementen en la direcció d'integració sobre la pressió del mètode primitiu, a diferència d'aqueixes per diversos nivells de l'EO que segueixen igual de suaus i amb dinàmica vertical ben definida a grans extensions del domini. Aquesta característica negativa és conseqüència del tractament numèric aplicat, on les integrals dels mètodes primitius són resoltes iterativament usant la solució del nivell passat per adquirir la següent, pel qual els errors numèrics són acumulats i s'incrementa el soroll per cada nou nivell. També afecta que el mètode aplicat per resoldre integrals només és vàlid per nivells isobàrics propers, però donat que la distància vertical ocupada per 50 hPa entre dos nivells augmenta amb l'altura, la precisió dels resultats decreix al pujar en la troposfera.

L'anàlisi comparativa dels resultats exposats permet observar les característiques de les velocitats verticals diagnosticades pels mètodes primitius, mostrant que si bé tenen com a avantatge la proporció de resultats amb semblances reconeixibles als de les EO amb un baix cost computacional (< 7 s) per la seva ximplesa numèrica, també presenten un conjunt d'inconvenients i desavantatges que redueixen la seva utilitzat, deixant-los per darrere de les EO, tenint per començar les pròpies imprecisions adquirides en fer ús els camps de vents horitzontals amb les incerteses que solen posseir. El MV (2.19) prova ser el mètode menys recomanable, presentant una tendència a sobreestimar la magnitud del moviment tant en àrees coincidents amb la resta d'equacions com no, destacant sobretot per un problema de soroll excessiu, inconvenients tan provocats per la integració numèrica, com per la falta de dades temporalment properes dels camps de velocitats horitzontals, causant crues estimacions de $\partial_t \zeta$ i per tant conflictes amb el terme advection $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta$. El MC (2.15) amb l'ajust corrector de O'Brien presenta les estructures més dèbils de magnitud i forma respecte als altres mètodes diagnòstics, dificultats per coincidir amb la localització dels màxims ascensos i certa quantitat de soroll que s'incrementa en avançar cap al cim de la troposfera, no obstant també ofereix formacions sorprenentment similars a les EO, especialment als descensos, sent generalment bastant més recomanable que el MV. Llavors, es veu com els resultats de les EO presenten una important millora, on partint de camps de dades

molt fiables com el geopotencial i la temperatura, generen grans i suaus estructures sinòptiques de moviment vertical ben definit, tant a 500 hPa com altres nivells, essent els resultats també molt més precisos a tot el domini donat el procés numèric iteratiu que utilitzen fins a convergir a la solució (3.8), clar que a un cost computacional major (15 - 55 s per $\epsilon < 10^{-5}$ Pa/s).

4.2 Comparació entre les equacions Omega quasigeostròfiques

Esclariada la millora que suposen les EO de la TQG respecte als mètodes primitius al diagnòstic de velocitats verticals, a continuació es du a terme una anàlisi comparativa dels resultats donats per cada formulació disponible de les EO, sabent que donada l'estructura d'aquestes, els resultats haurien de ser semblants. El propòsit de l'estudi serà avaluar les peculiaritats de cadascuna en termes de les estructures, magnituds i signes que presenten, tenint en compte les raons pràctiques amb les quals varen ser desenvolupades les EO de Trenberth i el vector $\vec{Q}$. Al final, en termes dels resultats i les simplificacions utilitzades pel desenvolupament de cada formulació, serà escollida una per utilitzar-la al pròxim apartat en la comparació dels pronòstics.

L'anàlisi inicia observant els resultats al dia 19, on Glòria va arribar al Mediterrani i desplaçar-se fins a la mar d'Alborán. Aquesta ocasió també es practica un estudi dels forçaments característics de cada formulació i com terminen convergint a les mateixes àrees i signes, originant les semblances. Resolent les EO per aquest dia, són obtinguts els resultats a la Figura 9:

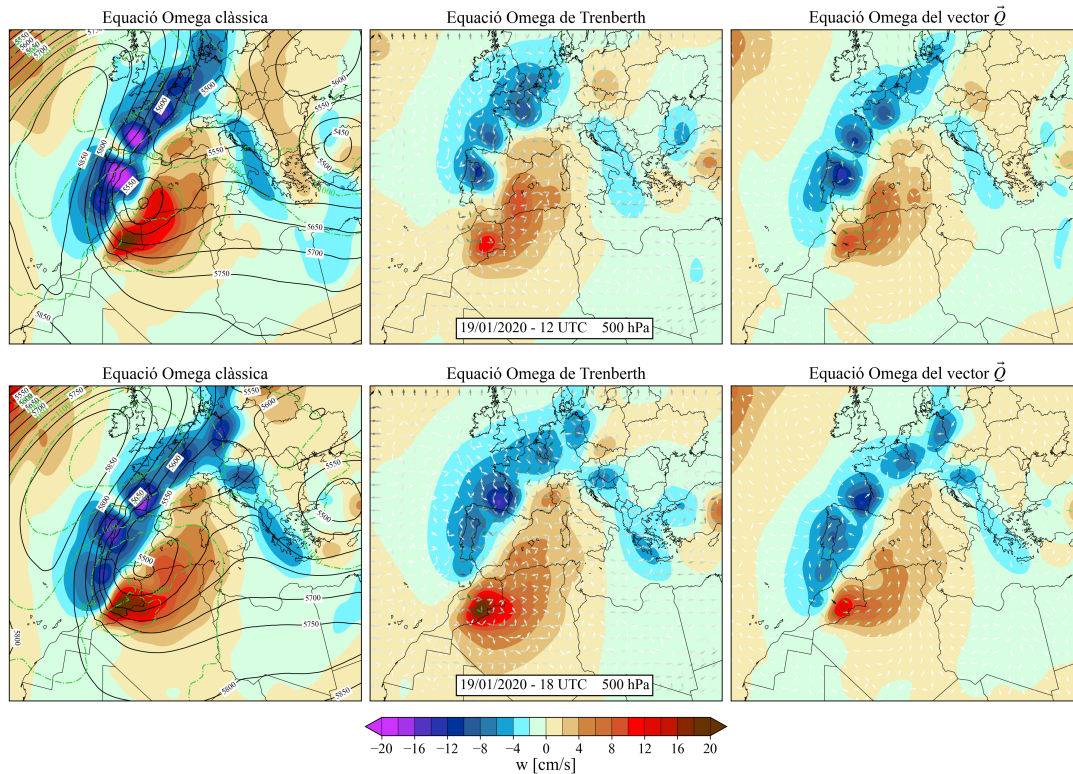


Figura 9: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals a 500 hPa, calculades resolent numèricament les EO amb dades de la reanàlisi ERA5 a les 12 i 18 UTC del dia 19 de gener 2020. Els resultats de l'EOC són representats junt les isohipses (mcp) a 500 hPa (negres i contínues) i 900 hPa (verdes i discontinúes). Als de l'EOT els vectors negres corresponen al gradient de ζ_g i els verds a $\partial_p \vec{V}_g$, on la saturació del color és segons l'augment del mòdul. L'EOQ té representats els vectors $\vec{Q}$ des del blanc i verd fins a negre també amb l'increment el mòdul.

Les velocitats verticals obtingudes mostren similituds molt clares en la localització dels principals moviments, la seva direcció i valors màxims al domini. A les hores vistes, totes diagnostiquen descensos notables sobre la Mar Adriàtica i Jònica durant el matí i sobre els Balcans i Europa en paral·lel a l'Atlàntic a les dues hores, essent a l'últim els més intensos. Els ascensos principals coincideixen amb el pas de Glòria, estant al llarg del litoral Mediterrani d'Espanya, Balears i la Mar d'Alborán pel migdia, per després estar al nord-oest d'Àfrica, encara mantenint ascensos importants al Mediterrani Occidental i les costes properes. Addicionalment, es veu que totes les EO retornen estructures extenses com les esperades d'una teoria sinòptica com la TQG.

Sabent que la diferència entre les EO resideix al forçament, les grans similituds entre formulacions es comprenen analitzant les components que involucren i com convergeixen a les mateixes àrees i signes. Els casos més fàcils són els forçaments a l'EOT i l'EOQ, tenint al primer que les zones on $\partial_p \vec{V}_g$ i $\vec{\nabla}_p \zeta_g$ tendeixen al paral·lisme són positius i on apunten en direccions oposades negatius, mentre que al segon enllà on els vectors $\vec{Q}$ convergeixen corresponen valors positius i on divergeixen negatius. El cas de l'EOC és més complex, però a sistemes sinòptics de latituds mitjanes es resumeix en què generalment $A \sim -\partial_p[-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p(\zeta_g + f_0)]$ és positiu enfront i negatiu darrere dels tàlvegs i $B \sim -\vec{\nabla}_p^2[-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p T]$ és més fàcil d'entendre baixes altures (900 hPa), on $-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p T$ és més fort i les isohipses es tanquen, tenint a les baixes moviments antihoraris del camp de vents geostròfics que al domini transporten aire calent a la dreta i fred a l'esquerra d'aquestes, tenint llavors un forçament positiu i negatiu respectivament. Cal esmentar que la intensitat dels forçaments també està lligat als mòduls dels vectors i les magnituds dels paràmetres que els conformen. Amb aquesta anàlisi, observar els camps vectorials i isolínies sobre les solucions de la dinàmica vertical al dia 19 en la Figura 9, permet veure com les EO tenen semblants forçaments en signe i posició, donant ascensos i descensos molt similars.

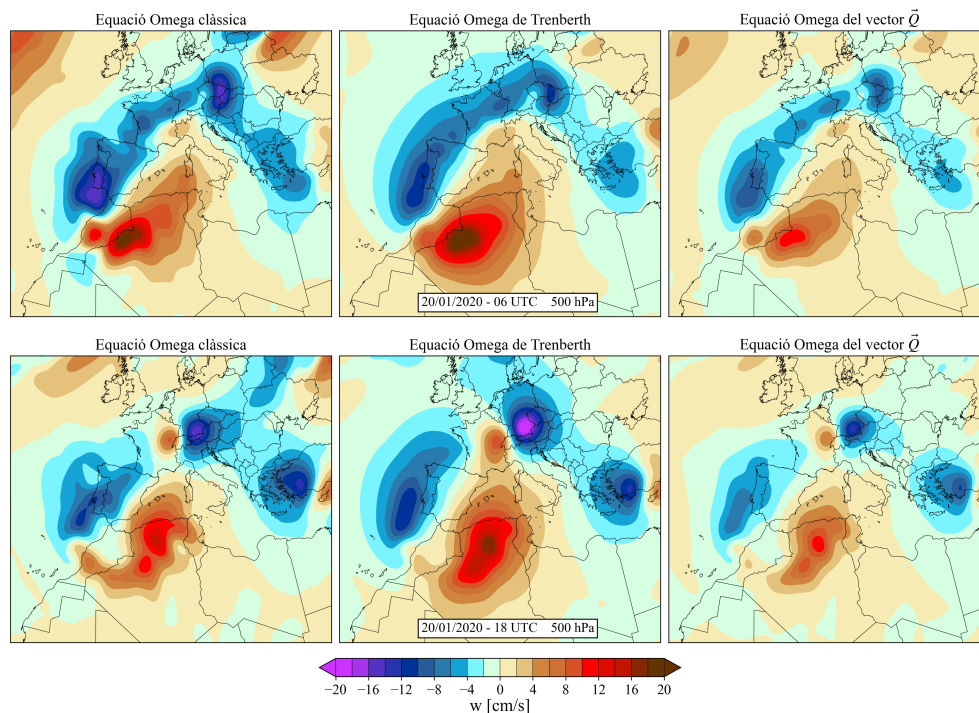


Figura 10: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals al nivell isobàric de 500 hPa, calculades resolent numèricament les EO fent ús de les dades de la reanàlisi ERA5 a les 12 i 18 UTC del dia 20 de gener 2020.

Tanmateix, hi ha diferències visibles entre diagnòstics, concretament a les magnituds i formació d'estructures. Als casos del dia 19, és veu que l'EOC presenta les estructures més fortes i intenses tant als ascensos com els descensos, tenint també els valors màxims sobre àrees més extenses; al contrari, el mètode amb les estructures i valors més dèbils no està clar, donat que al matí pareix ser l'EOT però a l'horabaixa l'EOQ. El que si s'observa és que l'EOQ presenta les ascensions màximes més dèbils i en extensions més petites de totes a les principals zones d'activitat. Les distincions vistes impliquen que llevat de l'alta semblança, cada formulació té diferències que han de ser estudiades per entendre com terminen afectant els resultats de diagnòstic finals.

Els primers diagnòstics han permès observar visualment i en termes de les components del forçament, com les EO presenten resultats generals molt semblants, però que igualment existeixen diferències visibles entre mètodes, diferències que han de ser analitzades si es vol comparar correctament cada formulació de l'EO. Llavors, les equacions diagnòstiques són resoltes a dues hores del dia 20 (cim de Glòria al Mediterrani) i 21 (debilitació i desplaçament progressiu de la borrasca) obtenint els resultats de la Figura 10 i 11, per així analitzant els estructures, signes i magnituds, extreure les característiques individuals i comuns de les formulacions.

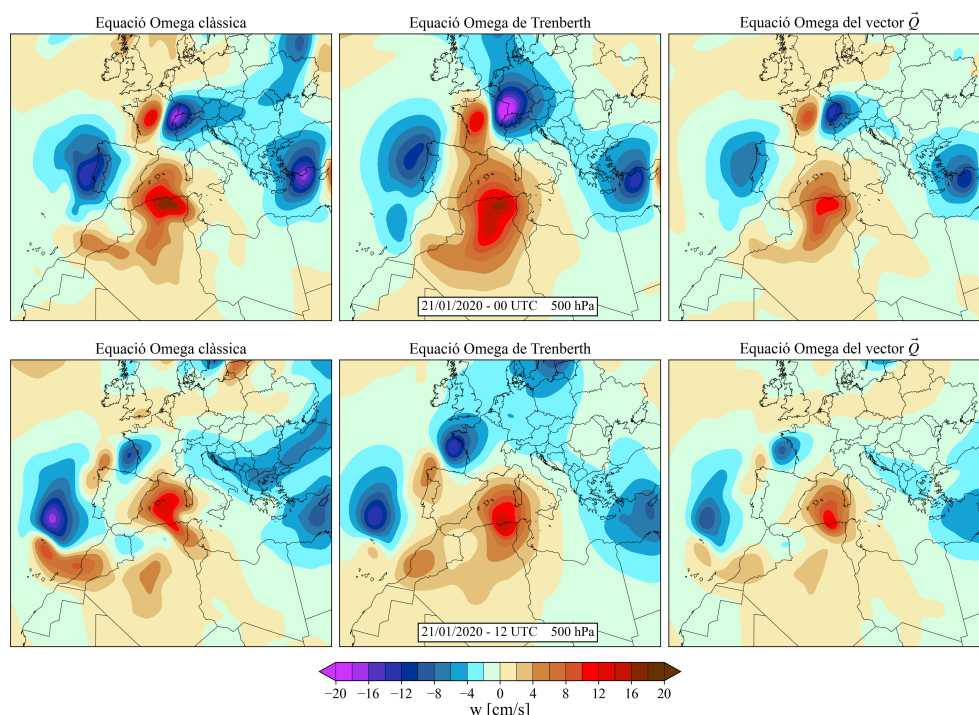


Figura 11: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals al nivell isobàric de 500 hPa, calculades resolent numèricament les EO fent ús de les dades de la reanàlisi ERA5 a les 00 i 12 UTC del dia 21 de gener 2020.

Les solucions dels dos dies tornen a mostrar que els resultats de cada formulació són summament semblants en la localització de les estructures principals, direcció vertical de l'aire i al posicionament dels valors màxims. Per exemple, al matí del dia 20 mostren forts descensos gairebé a tota Europa amb valors màxims sobre República Txeca, Portugal i la seva costa Atlàntica al sud, mentre que al migdia del 21 els descensos són posats sobre l'Atlàntic i la seva costa Francesa, els Balcans i la Mar Llevantina, amb màxims sobre els dos primers. La situació dels ascensos, coincideix amb la presència i desplaçament de Glòria, tenint el Mediterrani Occidental i el nord-

oest d'Àfrica dominat per elevacions d'aire, a més d'uns ascensos també sobre França a algunes hores entre els dos dies, quedant els màxims sobre Algèria i movent-se cap al nord-est fins a la costa, on el decaïment de la borrasca es veu com un decreixement de l'àrea amb màxims ascensos al migdia del 21. Cal esmentar que es torna a veure com la dinàmica vertical diagnosticada per les EO proporciona suaus i extenses estructures amb caràcter vertical ben definit.

La quantitat de resultats exposa les diferències recurrents, essent les més notables relacionades amb les magnituds i estructures. S'observa que mentre l'EOC i l'EOT arriben i superen velocitats de ± 20 cm/s a més de generar les formacions més intenses i grans del conjunt, l'EOQ tendeix a quedar per darrere no pareixent diagnosticar moviments majors a ± 14 cm/s, també tenint les estructures més dèbils i petites del conjunt, veient-se sobretot als ascensos. Tanmateix, són l'EOC i l'EOQ quins mostren els diagnòstics més semblants en localitzacions i signes, donat que l'EOT pareix presentar a vegades estructures de magnitud notable i signe oposat a la resta, com els descensos sobre Dinamarca i la Mar del Nord tant a l'horabaixa del dia 20 com a totes les hores vistes del 21. Una altra observació molt destacable, és que el conjunt de resultats exposats també mostra que les solucions determinades per l'EOC retornen les estructures més sorolloses en comparació amb aqueixes més “circulars” de l'EOT i l'EOQ.

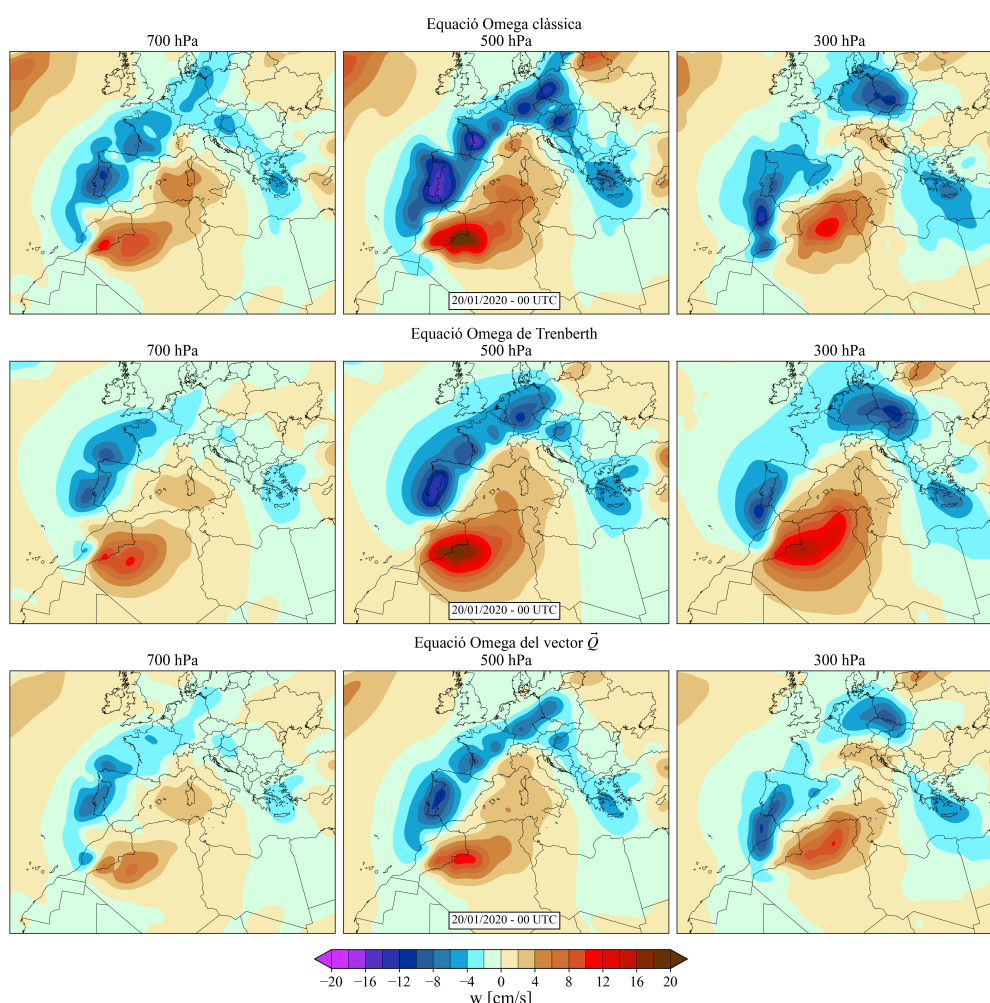


Figura 12: Estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals als nivells isobàrics de 700, 500 i 300 hPa, sorgides de resoldre numèricament les EO amb dades de la reanàlisi ERA5 corresponents a la matinada del dia 20 de gener 2020.

Finalment, a les 00 UTC del dia 20 (moment àlgid de Glòria al Mediterrani) són resoltes les EO i exposats a la Figura 12 els diagnòstics a diversos nivells. Amb aquests resultats, és fàcil observar com totes les formulacions retornen diagnòstics suaus, extensos i de direcció ben definida tant a 500 hPa com la resta de nivells, destacant també que 500 hPa posseeix les formacions més intenses i velocitats més altes de totes com calia esperar al no considerar la TQG l'orografia. Com a l'apartat previ, es veu relació estructural per cada mètode entre els seus nivells isobàrics propers, relació més notable entre 700 i 500 hPa per la major proximitat espacial. Simultàniament, són evidents les fortes semblances entre formulacions sobre el mateix nivell isobàric i al posicionament de les àrees amb velocitats verticals màximes. Les diferències esmentades al paràgraf anterior sobre cada EO són visibles a tots els nivells, tenint doncs que l'EOQ diagnostica les estructures més dèbils i magnituds més petites del conjunt i l'EOC dona les estructures més sorolloses en comparació a la resta. Amb tot i això, aquestes dues són les formulacions més semblants en termes d'estructura i direcció del moviment, veient que a 300 hPa l'EOT uneix les tres àrees d'enfonsaments d'aire principals per descensos notables i presenta encara una gran zona d'ascensos importants a diferència de la resta.

Resoldre les EO i exposar dels resultats, mostra la qualitat dels diagnòstics de la TQG i les grans semblances entre formulacions, tenint totes les principals formacions a mateixes àrees, coincidint en el signe i zones de valors màxims a tots els nivells. Tanmateix, tenen diferències sorgides de les variables i operacions component els forçaments i les simplificacions als seus desenvolupament. L'EOC amb d'un paràmetre d'estabilitat $\sigma = \sigma(p)$ i un forçament a dos termes, retorna grans i fortes formacions de moviment vertical ben definit amb màxims on A i B més es reforcen, també essent aquests els causants de les estructures menys suaus quan s'interfereixen, renou que augmenta amb les imprecisions sobre Φ . L'EOT usant vàries reduccions, prova la seva validesa reformulant l'EOC a un terme que només necessita dades del nivell, donant resultats d'intensitat i magnitud similars o majors, permetent també inferir on seran els moviments observant el mòdul i producte escalar de $\partial_p \vec{V}_g$ i $\vec{\nabla}_p \zeta_g$, només tenint el problema de a vegades generar moviments distints a la resta. L'EOQ és la més pràctica, on de dades d'un nivell, són calculats el camp de vectors $\vec{Q}$ dels quals conèixer la dinàmica només del caràcter vectorial, a més d'un forçament a un terme com l'EOT comportant en ambdues solucions més suaus, malgrat això, és l'absència de components verticals al forçament la causa dels diagnòstics més petits i dèbils que presenta. Comparar els resultats, mostra que l'EOC dona els diagnòstics més complets, amb grans estructures de velocitat vertical amb signes i valors ben marcats, mostrant on és l'activitat més intensa. També és la formulació amb menys simplificacions i que més física té al forçament, a més que l'alta precisió de les dades comporta a què el renou sigui baix. Aquestes observacions són els arguments usats per escollir l'EOC com la millor formulació en caràcter general i serà la utilitzada en la comparació dels pronòstics.

4.3 Comparació entre resultats de diagnòstic i de pronòstic del TRAM-UIB

Escollida la formulació clàssica com el millor mètode diagnòstic, són finalment exposats i comparats els pronòstics del model TRAM-UIB partint del 18 de gener 2020 - 00 UTC, amb aquells instantanis de l'EOC. Donat al caràcter mesoescalar del model i al no filtrar els resultats, tindran estructures amb components subsinòptiques, pel qual les comparacions es faran sobretot en

termes del moviment predominant a l'escala sinòptica. Dels quatre tipus de pronòstics, només s'exposaran aquells la física sencera, sent la incorporació o no de l'orografia un aspecte a estudiar.

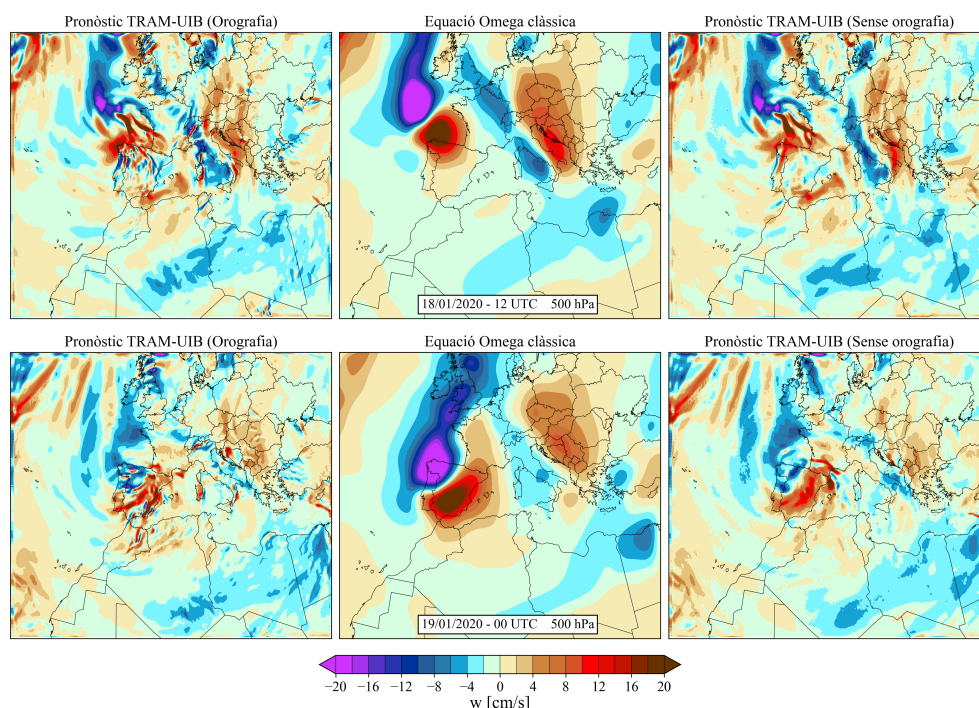


Figura 13: Pronòstic a 12 i 24 h de les estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals a 500 hPa pel model TRAM-UIB amb i sense orografia, respecte aqueixes de l'EOC usant les dades de la reanàlisi ERA5 a les 12 UTC del dia 18 i 00 UTC del dia 19 de gener 2020.

L'anàlisi comparativa s'inicia observant els pronòstics a 12 i 24 h de la Figura 13, on donada la proximitat temporal veure les semblances amb els diagnòstics és immediata. Hi ha forts descensos a 12 h des d'Anglaterra fins a Itàlia o sobre l'Atlàntic envoltant Irlanda, mostrant els descensos màxims sobre a una àrea més reduïda que el diagnòstic, així com a 24 h destacant sobre el nord d'Àfrica i especialment que aqueixes abans properes a Irlanda ara són a l'Atlàntic partint de les Illes Britàniques fins al nord-oest de la península Ibèrica, només que aquesta ocasió subestimant el pronòstic bastant els màxims descensos a Galícia. Els ascensos predits per TRAM-UIB també segueixen el diagnòstic, tenint a 12 h formacions sobre la mar Adriàtica i els Balcans, que a 24 h són només a l'últim i reduïts en magnitud. Destaca sobretot la precisió del model pronosticant pel dia 18 al migdia l'arribada de la depressió Atlàntica a la península Ibèrica com una gran formació d'ascensions molt fortes i per a la matinada del dia 19 ser sobre la península ja formada com la borrasca Glòria i mantenint els forts ascensos. Els efectes de l'orografia són visibles des de l'inici, on mentre a Atlàntic obert la seva absència comporta pronòstics gairebé iguals, sobre els continents s'observa la influència dels terrenys muntanyosos l'estructura, magnitud i generació de velocitats verticals, veient-se als pronòstics formacions mesoescalars a la península Ibèrica, a 24 h sobre la Cordillera de l'Atlas, o sobtats ascensos sobre uns Alps envoltats per forts descensos, efectes que desapareixen en treure l'orografia.

Verificada l'efectivitat del model TRAM-UIB al pronòstic fins a un dia de les velocitats verticals, s'analitza de nou la seva potència predictiva observant els pronòstics a 48 h (coincidint al moment àlgid de Glòria) a tres nivells isobàrics comuns, resultats presents a la Figura 14:

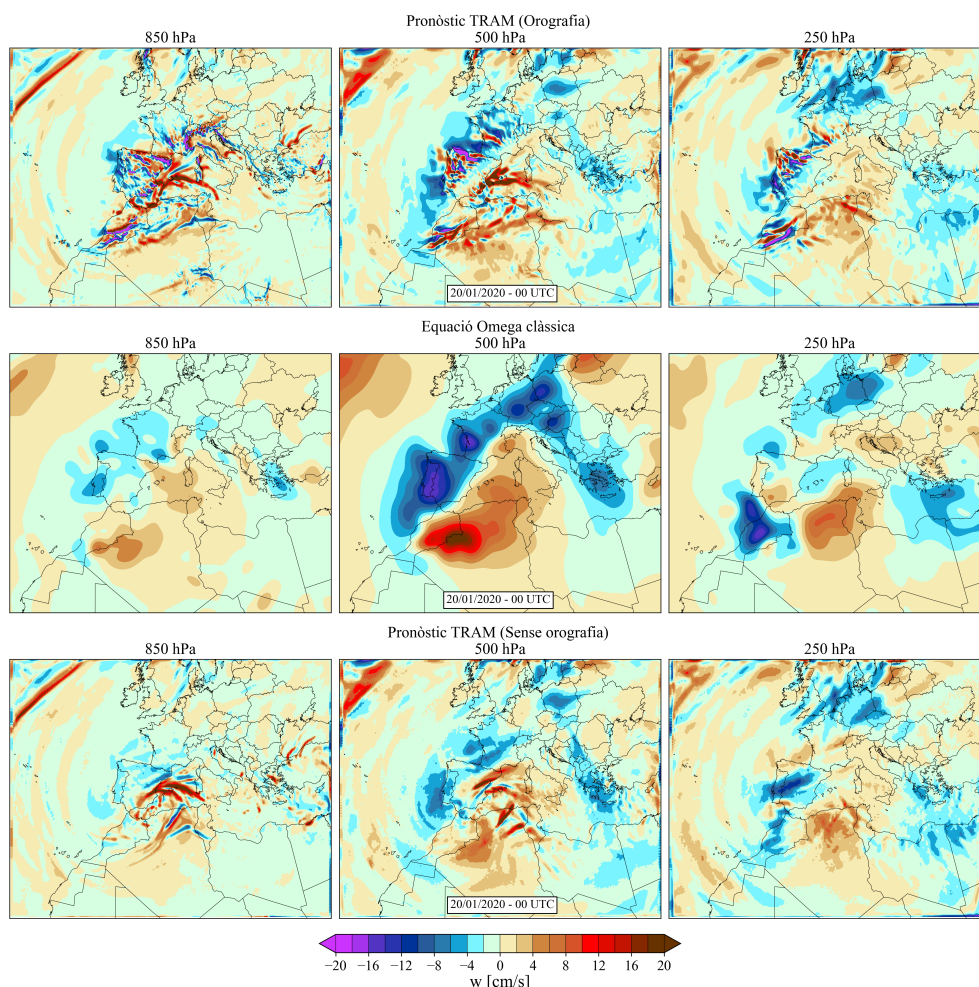


Figura 14: Pronòstic a 48 h de les estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals a 850, 500 i 250 hPa pel model mesoescalar TRAM-UIB amb i sense orografia, respecte aqueixes calculades amb l'EOC usant les dades de la reanàlisi ERA5 a les 00 UTC del 20 de gener 2020.

A dos dies de pronòstic, encara s'observen remarcables semblances amb el diagnòstic per tots els nivells exposats, tant amb l'orografia com no. Començant per la baixa troposfera, els efectes de l'orografia són immediats, sent la isobàrica amb les majors formacions subsinòptiques, especialment sobre la península Ibèrica, els Alps i la Cordillera de l'Atles, àrees on treure l'orografia dona resultats més suaus però de menor magnitud. Les similituds amb el diagnòstic són notables, amb descensos generals sobre França, la península Ibèrica i l'envoltant de la mar Egea, amb els ascensos quedant al nord-oest d'Àfrica i la Mediterrània Occidental, ara que en magnituds i posició dels màxims no hi ha tanta semblança. La troposfera mitjana mostra una reducció dels efectes orogràfics, però encara presents sobre la península Ibèrica, sud de França i nord-oest d'Àfrica, on apareixen moviments en direcció oposada a la de l'àrea, situació que desapareix en treure l'orografia, donant formacions més suaus i d'única direcció vertical, però de nou amb magnituds menors. Les similituds amb el diagnòstic són fortes, tenint descensos al llarg d'Europa en paral·lel a l'Atlàntic i sobre els Balcans fins a la mar Egea, quedant els ascensos localitzats com abans però més marcats i forts sobre el nord-oest d'Àfrica, tenint disparitats de nou en col·locar els màxims. A l'alta troposfera la influència de l'orografia és mínima i els pronòstics tenen formacions més semblants, però encara amb certa influència al nord-oest

d'Àfrica i la península Ibèrica, igualment presentat el cas sense orografia menors magnituds. Al nivell els pronòstics són encara semblants al diagnòstic, tenint descensos sobre el Marroc, Alemanya i la Mar Llevantina, quedant els ascensos principals sobre el nord d'Algèria, ara que els dos pronòstics posen descensos a l'est de la península Ibèrica no contemplats pel diagnòstic.

Als pronòstics amb orografia no és tan evident la relació estructural entre nivells propers vista abans als diagnòstics, sobretot entre 850 i 500 hPa, essent això conseqüència de la forta influència de l'orografia a la baixa troposfera. El mateix pronòstic a 500 hPa tampoc deixa clar que sigui aqueix nivell amb les velocitats màximes, el que és esperable atès que aquesta tendència era més vàlida sense topografia, no obstant, si es veu que les estructures més intenses i grans queden al nivell, així com un debilitament dels ascensos a 250 hPa. S'observa de nou per tots els nivells disponibles com on l'orografia és poc important o nul·la, resulta en ambdós pronòstics donant resultats gairebé iguals, essent el cas de l'oceà Atlàntic obert o la gran plana europea.

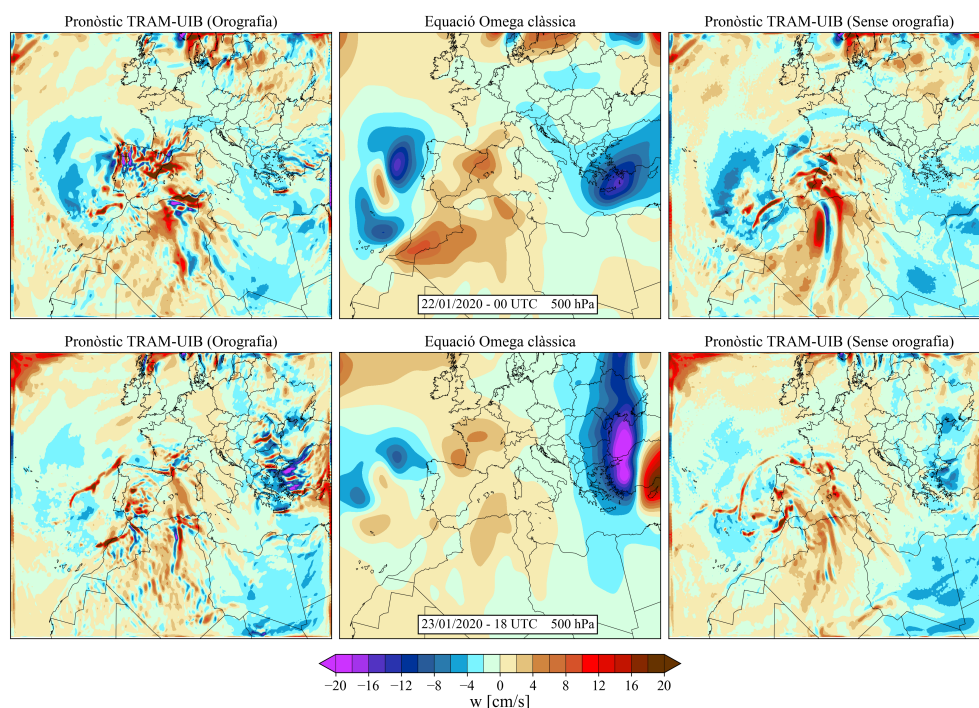


Figura 15: Pronòstic a 96 i 138 h de les estructures, magnituds i signes de les velocitats verticals a 500 hPa pel model TRAM-UIB amb i sense orografia, respecte aqueixes calculades amb l'EOC usant les dades de la reanàlisi ERA5 a les 00 UTC del dia 22 i 18 UTC del dia 23 de gener 2020.

Finalment, s'analitzen els pronòstics a major termini de TRAM-UIB observant els seus resultats per a quatre dies i l'última data amb dades disponibles, tenint aquests pronòstics a la Figura 15. Evidentment, pel llarg termini de resolució del model, apareixen algunes diferències relacionades amb les magnituds, valors màxims i estructures no presents al diagnòstic o viceversa, com descensos al nord-est d'Àfrica o ascensos sobre l'Atlàntic. Malgrat això, en direcció i localització dels moviments TRAM-UIB encara pronostica bé usant o no l'orografia respecte al diagnòstic, coincidint en la matinada del 22 (96 h) amb descensos generals sobre Turquia, la mar Llevantina i més forts sobre l'Atlàntic, amb ascensos sobre el nord-oest d'Àfrica i la península Ibèrica, els dos amb força a les costes Mediterrànies, on el diagnòstic mostra també valors importants. La situació al 23 per l'horabaixa (138 h) mostra un relaxament de les formacions prèvies, però ara

destacant sobre Turquia al seu est forts ascensos i del seu oest cap a Rússia una gran formació descendent amb màxims sobre la mar Negra, màxims també pronosticats per TRAM-UIB amb orografia. Addicionalment, a pesar de la resolució a llarg termini del model, es continua veient que zones amb poca o cap orografia encara presenten similituds rellevants als pronòstics.

Les velocitats verticals pronosticades pel model mesoescalar TRAM-UIB, proven la seva eficàcia donant prediccions precises en comparar-se amb els diagnòstics instantanis de l'EOC, coincidint bastant bé fins a 138 h al que respecta el posicionament i direcció vertical de les estructures. Evidentment, aquesta precisió decreix en exactitud amb el temps de pronòstic, tenint els millors resultats per 12 i 24 h, on l'ús o no de l'orografia reproduceix molt bé la distribució d'ascensos i descensos presents als moments, l'arribada i pas de la borrasca i posicionament dels valors màxims, només amb algunes diferències de magnitud i extensió dels màxims. A 48 h els pronòstics mostren la seva precisió a tots els nivells, així com mostrar algunes característiques vistes a estudis multinivell previs. Els efectes de l'orografia als pronòstics i les velocitats verticals i com són més forts segons la proximitat amb la superfície són clars, induint no només subestructures, sinó també incrementant la magnitud dels moviments i la generació d'altres addicionals. Al final, els pronòstics amb l'orografia terminen essent els més semblants als diagnòstics instantanis, resultat esperable donada la complexitat més gran del càlcul, ser més realista i com les dades d'ERA5 tenen de forma implícita informació orogràfica, influint els resultats de l'EOC.

5 Conclusions

Els objectius perseguits per aquest treball consistien en implementar, resoldre i comparar diversos mètodes diagnòstics de la velocitat vertical per sistemes sinòptics de latituds mitjanes, basats en equacions primitives i aqueixes més complexes de la TQG, per així analitzar els resultats, aplicabilitat pràctica i avantatges de cada mètode. Després, amb els millors diagnòstics s'analitzaria la capacitat de predicció del model TRAM-UIB comparant amb els seus pronòstics.

Els mètodes primitius són atractius per la seva ximplesa numèrica, proporcionant diagnòstics en pocs segons. Malgrat això, l'estudi va verificar els nombrosos inconvenients que presenten, com les imprecisions de l'ús dels camps de vents horitzontals o l'increment dels errors en la direcció d'integració. El MV (2.19) ha provat donar els pitjors diagnòstics, amb una tendència a la sobreestimació de magnituds i un problema de soroll excessiu, donant resultats molt variants i en àrees no coincidents amb la resta, tots els problemes causats per crues estimacions de $\partial_t \zeta$ i interferències amb $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta$ per la baixa disponibilitat de dades del vent temporalment properes, deixant el mètode gairebé inusable. El MC (2.15) amb l'ajust de O'Brien (3.5) proporciona els diagnòstics amb les magnituds més dèbils i estructures reduïdes del conjunt, amb problemes per coincidir amb els màxims ascensos i també presentant soroll sobretot a nivells alts, només que menys problemàtic que el MV. Amb això i tot, aquest ha mostrat grans coincidències amb aquells resultats de les EO, especialment als descensos, quedant el MC com una opció a considerar si es desitja realitzar un diagnòstic ràpid a nivells baixos i mitjans.

Les equacions Omega (2.28), (2.29) i (2.30) a partir de camps precisos i fiables com és el geopotencial i la temperatura, han provat la seva superioritat al càlcul diagnòstic de les velocitats

verticals, produint tots grans estructures sinòptiques, suaus i amb direcció vertical ben definida, tant a 500 hPa com la resta de nivells, amb una major precisió numèrica per com convergeix el mètode SOR (3.8). S'ha observat l'aplicabilitat presentada per l'EOT i l'EOQ, tenint les dues formulacions un forçament que permet inferir la dinàmica vertical analitzant el caràcter vectorial, necessitar només dades del propi nivell i al ser forçaments a un terme presenten molt poc soroll, només amb el problema de l'EOT donar estructures no mostrades per la resta i l'EOQ donar els resultats menys intensos i més dèbils per falta de components verticals al forçament. L'EOC per la seva banda, tenia l'inconvenient de necessitar informació d'altres nivells isobàrics i un forçament a dos termes que provocava estructures més sorolloses, no obstant, ha provat donar els resultats més complets de tot el conjunt d'EO, amb extenses i fortes estructures de valors màxims ven marcats, a més de ser la formulació amb menys simplificacions.

L'EOC va ser la utilitzada per comparar els pronòstics del nou model TRAM-UIB partint de les mateixes dades inicials i implementant o no l'orografia. Efectivament sobretot a 12 i 24 els pronòstics varen mostrar immediates semblances amb el diagnòstic instantani, tant en localització, magnitud, valors màxims i signes de la velocitat vertical, mostrant tots l'arribada i pas de Glòria per la península Ibèrica. El pronòstic a 48 h per diversos nivells també va mostrar fortes semblances amb els diagnòstics per tots els nivells, mostrant la influència de l'orografia en la dinàmica vertical a baixos nivells, conduint a la formació d'estructures molt subsinòptiques amb majors magnituds i variacions, no com els resultats sense orografia molt més suaus i de magnitud menor. Finalment, els pronòstics a llarg termini de 96 i 138 h tenien diferències ja bastant notables, però encara presentaven certes coincidències en posicionament i signes.

6 Bibliografia

- [1] Holton, J. R., *An introduction to dynamic meteorology*, 5th Edition, (1992), Academic Press.
- [2] Iribarne, J.V. i W. L. Godson, *Atmospheric thermodynamics*, 2nd Edition, (1981), D. Reidel Publishing Company.
- [3] Romero, R. M., *Física de la Atmósfera*, (2022 - 2023), Universitat de les Illes Balears.
- [4] Lackmann, Gary., *Midlatitude Synoptic Meteorology: Dynamics, Analysis and Forecasting*, (2011), American Meteorological Society.
- [5] Funk, Ted., *A practical, basic guide to quasi-geostrophic theory, response to geostrophic deformation, ageostrophic motion, jet streaks*, (2011), National Weather Service. https://www.weather.gov/media/lmk/soo/QG_Theory_Review.pdf.
- [6] AEMET, *Borrasca Gloria*, (2020), Agencia Estatal de Meteorologia. https://www.aemet.es/es/conocermas/borrascas/2019-2020/estudios_e_impactos/gloria.
- [7] Alonso, B., Arin, L., et al., *Resumen sobre la Formación y Consecuencias de la Borrasta Gloria (19-24 enero 2020)*, (2020), Instituts de Ciències del Mar, CSIC i Institut Català de Recerca per a la Governança del Mar. https://digital.csic.es/bitstream/10261/204427/3/Report_Gloria_2020.pdf.

7 Apèndix

7.1 Funcions analítiques i valors típics a sistemes sinòptics extratropicals

L'anàlisi d'escala a sistemes sinòptics de latituds mitges, fa ús de les següents funcions analítiques per descriure el caràcter ondulatori típic del camp de vents i temperatura:

$$\vec{u} = (u, v, \omega) = \left(\hat{u}(p), \hat{v}(p) \sin \left[\frac{2\pi}{L}(x - ct) \right], \hat{\omega}(p) \sin \left[\frac{2\pi}{L}(x - ct - \gamma) \right] \right) \quad (7.1)$$

$$T = \bar{T}(p) - ay + \hat{T} \sin \left[\frac{2\pi}{L}(x - ct + \mu) \right] \quad (7.2)$$

Simultàniament, els valors típics característics dels paràmetres d'aquests tipus de sistemes són:

Paràmetre	Valor típic	Paràmetre	Valor típic
L	$\pi \cdot 10^6$ m	$\frac{\partial \hat{v}}{\partial p}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$ m/Pa·s
$\hat{u}, \hat{v}$	10 m/s	f_0	10^{-4} s ⁻¹
$\hat{\omega}$	1 cm/s	β	10^{-11} s ⁻¹ m ⁻¹
γ	L/2	$\frac{\sigma p}{R} = \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$ K/Pa
$\hat{T}$	10 K	$ \zeta $	10^{-5} s ⁻¹
a	10^{-5} K/m	$ \delta $	10^{-6} s ⁻¹
μ	0		

Taula 7.1: Valors típics dels paràmetres atmosfèrics a l'escala sinòptica extratropical

7.2 Desenvolupaments addicionals. Variables i funcions en diferències finites

A continuació, són exposats alguns desenvolupaments d'equacions i expressions aproximades en diferències finites sobre malles rectangulars, no fetes o presentades durant la introducció teòrica i la metodologia, però igual de gran importància per la realització dels càlculs del treball.

1. Advecció geostrofica:

$$-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}_p \theta = -\frac{1}{f_0} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{1}{f_0} J(\Phi, \theta) \equiv A_g[\theta] \quad (7.3)$$

2. Components del vector $\vec{Q}$:

$$\vec{Q} = \frac{-R}{\sigma p} \left(\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} \cdot \vec{\nabla}_p T, \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} \cdot \vec{\nabla}_p T \right) = -\frac{R}{\sigma p f_0} \left(\left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right), \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) = (Q_x, Q_y) \quad (7.4)$$

$$Q_x = \frac{R}{\sigma p f_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad Q_y = \frac{R}{\sigma p f_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (7.5)$$

Segui θ una variable escalar o vectorial discretitzada sobre una malla rectangular amb files (s), columnes (r) i nivells (m), els operadors diferencials horitzontals sorgits de les derivades parcials presenten la següent forma baix aproximació de diferències finites:

3. Gradient:

$$\vec{\nabla}_h \theta \approx \left(\frac{\theta_{s,r+1,m} - \theta_{s,r-1,m}}{2\Delta x}, \frac{\theta_{s+1,r,m} - \theta_{s-1,r,m}}{2\Delta y} \right) \quad (7.6)$$

4. Divergència:

$$\vec{\nabla}_h \cdot \vec{\theta} \approx \frac{\theta_{s,r+1,m}^{(x)} - \theta_{s,r-1,m}^{(x)}}{2\Delta x} + \frac{\theta_{s+1,r,m}^{(y)} - \theta_{s-1,r,m}^{(y)}}{2\Delta y} \quad (7.7)$$

5. Laplaciana:

$$\vec{\nabla}_h^2 \theta \approx \frac{\theta_{s,r+1,m} - 2\theta_{s,r,m} + \theta_{s,r-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\theta_{s+1,r,m} - 2\theta_{s,r,m} + \theta_{s-1,r,m}}{\Delta y^2} \quad (7.8)$$

6. Determinant Jacobi:

$$J(\theta, \pi) \approx \frac{(\theta_{s,r+1,m} - \theta_{s,r-1,m})(\pi_{s+1,r,m} - \pi_{s-1,r,m})}{4\Delta x \Delta y} - \frac{(\pi_{s,r+1,m} - \pi_{s,r-1,m})(\theta_{s+1,r,m} - \theta_{s-1,r,m})}{4\Delta x \Delta y} \quad (7.9)$$

Expressats els operadors diferencials com a diferències finites sobre malles rectangulars, junt aqueixes vistes en la Metodologia (3.1), algunes de les variables i funcions utilitzades pel treball vindran donades de forma aproximada i discretitzada segons les següents expressions:

7. Vorticitat vertical relativa:

$$\zeta_{s,r,m} \approx \frac{v_{s,r+1,m} - v_{s,r-1,m}}{2\Delta x} - \frac{u_{s+1,r,m} - u_{s-1,r,m}}{2\Delta y} \quad (7.10)$$

8. Vorticitat vertical relativa geostrofica:

$$\zeta_{s,r,m}^{(g)} \approx \frac{1}{f_0} \left(\frac{\Phi_{s,r+1,m} - 2\Phi_{s,r,m} + \Phi_{s,r-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{s+1,r,m} - 2\Phi_{s,r,m} + \Phi_{s-1,r,m}}{\Delta y^2} \right) \quad (7.11)$$

9. Divergència horitzontal del camp de vents:

$$\delta_{s,r,m} \approx \frac{u_{s,r+1,m} - u_{s,r-1,m}}{2\Delta x} + \frac{v_{s+1,r,m} - v_{s-1,r,m}}{2\Delta y} \quad (7.12)$$

10. Integrant del mètode de la vorticitat:

$$\Gamma_{s,r,m} = \frac{\zeta_{s,r,m}^{(t+1)} - \zeta_{s,r,m}^{(t-1)}}{2\Delta t} + u_{s,r,m}^{(t)} \frac{\zeta_{s,r+1,m}^{(t)} - \zeta_{s,r-1,m}^{(t)}}{2\Delta x} + v_{s,r,m}^{(t)} \frac{\zeta_{s+1,r,m}^{(t)} - \zeta_{s-1,r,m}^{(t)}}{2\Delta y} + v_{s,r,m}^{(t)} \beta \quad (7.13)$$

11. Forçament clàssic:

$$F^{(C)} = -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f_0) \right] - \frac{R}{\sigma p} \vec{\nabla}_p^2 \left[-\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} T \right] = -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial A_g[\zeta_g + f_0]}{\partial p} - \frac{R}{\sigma p} \vec{\nabla}_p^2 A_g[T] = A + B \quad (7.14)$$

$$A \longrightarrow A_{s,r,m} \approx -\frac{f_0}{\sigma_m} \frac{A_g \left[\zeta_{s,r,m}^{(g)} + f_0 \right]_{s,r,m-1} - A_g \left[\zeta_{s,r,m}^{(g)} + f_0 \right]_{s,r,m+1}}{\Delta p} \quad (7.15)$$

$$B \longrightarrow B_{s,r,m} \approx \frac{R}{p_m \sigma_m d^2} (A_g[T_{s,r,m}]_{s+1,r,m} + A_g[T_{s,r,m}]_{s-1,r,m} + A_g[T_{s,r,m}]_{s,r+1,m} + A_g[T_{s,r,m}]_{s,r-1,m} - 4A_g[T_{s,r,m}]_{s,r,m}) \quad (7.16)$$

12. Forçament de Trenberth:

$$F^{(T)} = \frac{2f_0}{\sigma} \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} \cdot \vec{\nabla}_p \zeta_g = -\frac{2R}{\sigma p} \left(-\frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \zeta_g}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} \right) = \frac{2R}{\sigma p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} \right) \quad (7.17)$$

$$F^{(T)} \longrightarrow F_{s,r,m}^{(T)} \approx \frac{2R}{\sigma_m p_m 4 \Delta x \Delta y} \left[(T_{s+1,r,m} - T_{s-1,r,m}) \left(\zeta_{s,r+1,m}^{(g)} - \zeta_{s,r-1,m}^{(g)} \right) - (T_{s,r+1,m} - T_{s,r-1,m}) \left(\zeta_{s+1,r,m}^{(g)} - \zeta_{s-1,r,m}^{(g)} \right) \right] \quad (7.18)$$

13. Forçament del vector $\vec{Q}$:

$$F^{(Q)} = -2 \vec{\nabla}_p \cdot \vec{Q} = -2 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (Q_x, Q_y) = -2 \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \quad (7.19)$$

$$F^{(Q)} \longrightarrow F_{s,r,m}^{(Q)} \approx -2 \left(\frac{Q_{s,r+1,m}^{(x)} - Q_{s,r-1,m}^{(x)}}{2 \Delta x} + \frac{Q_{s+1,r,m}^{(x)} - Q_{s-1,r,m}^{(x)}}{2 \Delta y} \right) \quad (7.20)$$

$$Q_{s,r,m}^{(x)} \approx \frac{R}{\sigma_m p_m f_0} \left(\frac{(\Phi_{s+1,r+1,m} + \Phi_{s-1,r-1,m} - \Phi_{s+1,r-1,m} - \Phi_{s-1,r+1,m})(T_{s,r+1,m} - T_{s,r-1,m})}{8 \Delta x^2 \Delta y} \right) \quad (7.21)$$

$$- \frac{R}{\sigma_m p_m f_0} \left(\frac{(\Phi_{s,r+1,m} - 2\Phi_{s,r,m} + \Phi_{s,r-1,m})(T_{s+1,r,m} - T_{s-1,r,m})}{2 \Delta x^2 \Delta y} \right)$$

$$Q_{s,r,m}^{(y)} \approx - \frac{R}{\sigma_m p_m f_0} \left(\frac{(\Phi_{s+1,r+1,m} + \Phi_{s-1,r-1,m} - \Phi_{s+1,r-1,m} - \Phi_{s-1,r+1,m})(T_{s+1,r,m} - T_{s-1,r,m})}{8 \Delta x \Delta y^2} \right) \quad (7.22)$$

$$+ \frac{R}{\sigma_m p_m f_0} \left(\frac{(\Phi_{s+1,r,m} - 2\Phi_{s,r,m} + \Phi_{s-1,r,m})(T_{s,r+1,m} - T_{s,r-1,m})}{2 \Delta x \Delta y^2} \right)$$